

第4回 数学IA 1日1題

2020/4/16

() 年 () 組 () 番 名前 ()

a は定数とする。関数 $y = -x^2 - 4ax - a$ ($0 \leq x \leq 2$) について、次の問いに答えよ。

(1) 最大値を求めよ。

(2) 最小値を求めよ。

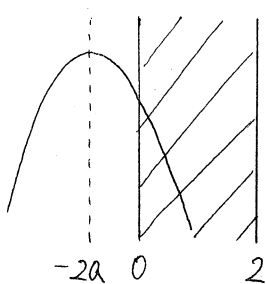
$$f(x) = -x^2 - 4ax - a \text{ とする。}$$

$$f(x) = -(x^2 + 4ax + 4a^2 - 4a^2) - a$$

$$f(x) = -(x + 2a)^2 + 4a^2 - a$$

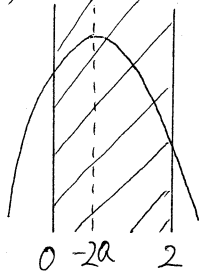
$y = f(x)$ は 頂点 $(-2a, 4a^2 - a)$ 、上に凸の放物線。

(1) (i) $-2a < 0$ のとき。



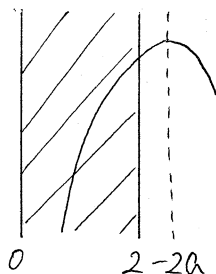
つまり $a > 0$ のとき
 $x = 0$ で最大値をとる。
 $f(0) = -a$

(ii) $0 \leq -2a \leq 2$ のとき



つまり、 $-1 \leq a \leq 0$ のとき
 $x = -2a$ で最大値をとる。
 $f(-2a) = 4a^2 - a$

(iii) $-2a > 2$ のとき

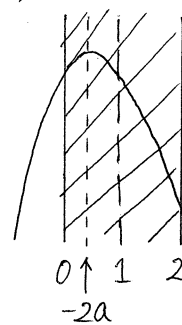


つまり、 $a < -1$ のとき
 $x = 2$ で最大値をとる。
 $f(2) = -4 - 8a - a$
 $= -9a - 4$

(i), (ii), (iii) より、最大値は

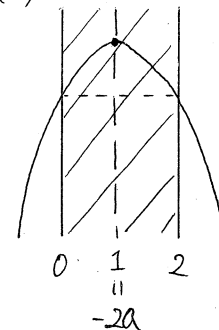
$$\begin{cases} a > 0 \text{ のとき } -a \quad (x=0) \\ -1 \leq a \leq 0 \text{ のとき } 4a^2 - a \quad (x=-2a) \\ a < -1 \text{ のとき } -9a - 4 \quad (x=2) \end{cases}$$

(2) (i) $-2a < 1$ のとき



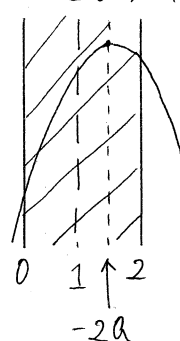
つまり $a > -\frac{1}{2}$ のとき
 $x = 2$ で最小値をとる。
 $f(2) = -9a - 4$

(ii) $-2a = 1$ のとき



つまり $a = -\frac{1}{2}$ のとき
 $x = 0, 2$ で最小値をとる。
 $f(0) = f(2)$
 $= \frac{1}{2}$

(iii) $-2a > 1$ のとき



つまり $a < -\frac{1}{2}$ のとき
 $x = 0$ で最小値をとる。
 $f(0) = -a$

(i), (ii), (iii) より、最小値は

$$\begin{cases} a > -\frac{1}{2} \text{ のとき } -9a - 4 \quad (x=2) \\ a = -\frac{1}{2} \text{ のとき } \frac{1}{2} \quad (x=0, 2) \\ a < -\frac{1}{2} \text{ のとき } -a \quad (x=0) \end{cases}$$