

完璧な完全直方体は存在するか

3524 土屋怜大

この研究では2通りの方法で完璧な完全直方体が存在するための条件を考える。1つ目の方法では、整式 $d^2 + e^2 + f^2 = 2g^2$ が成り立つことから、この式を満たす正整数の全ての組 (d, e, f, g) をそれらより少ない変数を用いて正整数 m の関数として求め、そのとき a, b, c のいずれかが正整数にならないことを証明することを目的とした。2つ目の方法では、 (a, b, c, g) をそれらより多い変数を用いて表し整式 $a^2 + b^2 + c^2 = g^2$ を必ず満たすようにすることで、 (a, b, c, d, e, f, g) の内いくつかは正整数となる組を生成することを目的とした。

キーワード 正整数 ExcelVBA

[0] 定義

完璧な完全直方体とは直方体において、直方体の各辺、各面の対角線、空間の対角線すべての長さの比が正整数であるもの。空間の対角線の比が正整数であるという条件を除けば、直方体の各辺、各面の対角線が正整数である完全直方体は存在している。本来、オイラーレンガと呼ばれることもあるが、書いてある文献によって名称が異なるため空間の対角線の条件を考える場合を完璧な完全直方体と言うものとする。

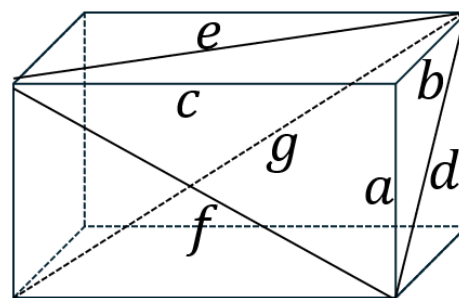
$f(x)$ を x を変数とする n 次の多項式としたとき、 $\deg\{f(x)\} = n$ とする。

[1]

1. 目的

完璧な完全直方体が存在しないことを示すため、完璧な完全直方体が存在しうる条件をしぼることを目的とする。

2. 仮説



(図-1)

直方体の各辺、各面の対角線、空間の対角線を(図-1)のようにおくことにより以下の式を得る。

$$a^2 + b^2 = d^2 \cdots \textcircled{1}$$

$$b^2 + c^2 = e^2 \cdots \textcircled{2}$$

$$c^2 + a^2 = f^2 \cdots \textcircled{3}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = g^2 \cdots \textcircled{4}$$

これらより次の式を得る。

$$d^2 + e^2 + f^2 = 2g^2 \cdots \textcircled{5}$$

これを満たす正整数の組 (d, e, f, g) をExcelVBAを用いて探し、規則性を考える。

3. 結果 i

ExcelVBAを用いて次の結果を得た。

(プログラム)

```

Sub defg()
Dim d As Long, e As Long, f As Long, g As Long, g1 As Long, k As Long, n As Long
n = 1
k = 1000
For d = 1 To k
  For e = d + 1 To k
    For f = e + 1 To k
      g1 = d ^ 2 + e ^ 2 + f ^ 2
      g = Sqr(g1 / 2)
      If (Int(Sqr(g1 / 2) = g)) Then
        If (g > f) Then
          Cells(n, 1).Value = n
          Cells(n, 2).Value = d
          Cells(n, 3).Value = e
          Cells(n, 4).Value = f
          Cells(n, 5).Value = g
          n = n + 1
        End If
      End If
    Next f
  Next e
Next d
End Sub

```

(結果)

d	e	f	g
11	19	20	21
13	27	28	29
16	19	21	23
17	47	48	49
19	59	60	61
20	31	33	35
22	38	40	42
23	25	32	33
23	87	88	89

4. 考察 i

以下 $d < e < f$ とする。

$e + 2 = f + 1 = g$ という組が見つかり、
これらの整数は $m \in N$ を用いて次のように表せる。

$$(d, e, f, g) = ((6m \pm 1), (6m^2 \pm 2m - 1), (6m^2 \pm 2m), (6m^2 \pm 2m + 1))$$

また同様に $e + 4 = f + 2 = g$ の場合、 d, e, f, g の最大公約数が 1 である組のみを考えると、

$$(d, e, f, g) = ((12m \pm 4), (12m^2 \pm 8m - 1), (12m^2 \pm 8m + 1), (12m^2 \pm 8m + 3))$$

が考えられる。

ここで、これらの組が全ての (d, e, f, g) の組を考えられていることを示す。

⑤ $d^2 + e^2 + f^2 = 2g^2$ について

$e + 2 = f + 1 = g$ のとき、

$$d^2 + (f - 1)^2 + f^2 = 2(f + 1)^2$$

$$d^2 = 6f + 1$$

$$d \equiv \pm 1 \pmod{6}$$

よって $d = 6m \pm 1 (m \in N)$

逆に $d = 6m \pm 1$ のとき $f = 6m^2 \pm 2m$ となり成立。

同様に $e + 4 = f + 2 = g$ のとき、

$$d^2 + (f - 2)^2 + f^2 = 2(f + 2)^2$$

$$d^2 = 12f + 4$$

$$d \equiv \pm 2, \pm 4 \pmod{12}$$

よって $d = 12m \pm 2, 12m \pm 4 (m \in N)$

ただし、 $d = 12m \pm 2$ は d, e, f, g の最大公約数が 1 にならないため $d = 12m \pm 4$ のみ考える

逆に $d = 12m \pm 4$ のとき $f = 12m^2 \pm 8m + 1$ となり成立。

5. 考察 ii

i のことを e, f, g の差に注目して考える。

$p, q \in N$ を用いて、 $e + p = f, f + q = g$ と表し、
 d, f を $m \in N$ の関数として、 $d = d(m), f = f(m)$ と
して考える。

⑤より次の式を得る。

$$d(m)^2 = 2(p + 2q)f(m) + (-p^2 + 2q^2) \cdots \textcircled{6}$$

このとき、十分に大きな M に対して $M < m$ で、
 $d(m) < f(m) - p$ となり $d < e < f < g$ を満たす。

⑥より、 $2\deg\{d(m)\} = \deg\{f(m)\}$ である。

$f(m)$ を 2 次の関数だと仮定して、 $\alpha, \gamma \in N, \beta \in Z$
を用いて、

$f(m) = am^2 + \beta m + \gamma$ とおくことにより次を得る。

$$d(m) = 2(p + 2q)am^2 + 2(p + 2q)\beta m + 2(p + 2q)\gamma + (-p^2 + 2q^2)$$

このとき $d(m) \in N[m]$ であることから、

$$2(p + 2q)\gamma + (-p^2 + 2q^2) = s^2 \text{ として考え、}$$

$\alpha = 2(p + 2q), \beta = \pm 2s$ とすると、

$$d(m) = 2(p + 2q)m \pm s \text{ となるものがある。}$$

$$\therefore d(m) = 2(p + 2q)m \pm s \cdots \textcircled{7}$$

$$f(m) = 2(p + 2q)m^2 \pm 2sm + \gamma \cdots \textcircled{8}$$

しかし任意の正整数 p, q に対してすべての

(d, e, f, g) の組がこの式で表されているかは考えることができてない。そのため今後は存在しない範囲をしぼるという点で考え、考えるべきすべての (d, e, f, g) の組のうち上記の式を満たしている (d, e, f, g) の組が完璧な完全直方体となるかを考えるものとする。

6. 考察 iii

ii で求めた (d, e, f, g) にさらに条件を考える。

仮説・方法 i と同様に①②③④より次の式を得る。

$$-d^2 + e^2 + f^2 = 2c^2 \cdots ⑨$$

c と e の差を r とおくと、 $c + r = e = f - p$ と表せるので⑨より次の式を得る。

$$d(m)^2 = 2(p + 2r)f(m) - (p^2 + 4pr + 2r^2) \cdots ⑩$$

⑥⑩より次の式を得る。

$$4(r - q)f(m) - (2q^2 + 4pr + 2r^2) = 0 \cdots ⑪$$

これを m についての方程式と考えると方程式が正整数解 m を持たなければならない。そのため少なくとも判別式 D は平方数である。

⑧を代入することにより次の式を得る。

$$D = 2^6(r - q)(p + q + r)(pq + 2qr + rp) \cdots ⑫$$

ここで $D > 0$ を示す。

$(p + q + r), (pq + 2qr + rp) > 0$ より $r - q > 0$ を示す。

補題 1

$F(x) = \sqrt{x+t} - \sqrt{x}(x > 0, t > 0)$ とするとき $F(x)$ は $x > 0$ で単調減少する。

証明 1

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{1}{2}\left\{(x+t)^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right\} < 0$$

よって、成立。

$$\begin{aligned} r &= e - c \\ &= \sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{c^2} \\ q &= g - f \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \end{aligned}$$

補題 1 より $a^2 + c^2 > c^2$ であるため、

$F(a^2 + c^2) < F(c^2)$ となり $r > q$ が成り立つ。

以上より $D > 0$ となる。

しかし、逆に D が平方数であり、解 m が正整数であっても (c, d, e, f, g) が条件を満たすとは限らない。

7. 結論

⑥⑩で 5 正整数 c, d, e, f, g を差 p, q, r で考え、⑦⑧で m に関して p, q, r を用いて表した。⑫で D を p, q, r を用いて表して D が平方数、また⑪で解 m が正整数であるという条件でしぼることができるよう

になった。

8. 展望

考察 ii で f を m の 2 次の関数と仮定しているため、今後はすべての (d, e, f, g) の組が⑦⑧の式で表せていることを示す。⑥を式変形することにより双曲線の方程式が得られ、漸近線を考えることで (d, f) を決めたとき (p, q) が一意に決まることを示すことがこれの解決につながると考えている。

[2]

1. 目的

複数の変数を決めたとき (a, b, c, d, e, f, g) の内いくつかが正整数となるものを生成することを目的とする。

2. 考察

一般的に $a^2 + b^2 + c^2 = g^2$ をそれぞれ次のように表せることが知られている。

$$\{(m^2 + n^2) - (p^2 + q^2)\}^2 + \{2(mp - nq)\}^2 + \{2(mq + np)\}^2 = \{(m^2 + n^2) + (p^2 + q^2)\}^2 \cdots ⑬$$

また、

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= \{2(mp - nq)\}^2 + \{2(mq + np)\}^2 \\ &= 4(m^2 + n^2)(p^2 + q^2) \end{aligned}$$

となり、 $4(m^2 + n^2)(p^2 + q^2)$ は平方数であるので $(m^2 + n^2) = \alpha \times S^2$

$$(p^2 + q^2) = \alpha \times T^2 (\alpha, S, T \text{ は正整数})$$

と表せる。

ここで、次の補題を示す。

補題 2

$A^2 + B^2 = C^2 \cdots ⑭$ を満たす正整数 (A, B, C) の全ての組は正整数 K, M, N を用いて、

$$A = K(M^2 - N^2)$$

$$B = 2KMN$$

$$C = K(M^2 + N^2)$$

と表すことができる。

証明 2

A, B, C のどの 2 つも互いに素であるとする。

このとき、⑭より、 A を奇数、 B を偶数としても一般性を失わない。

⑭より、 $B^2 = C^2 - A^2 = (C - A)(C + A)$

A と C はともに奇数であるから、 $C - A, C + A$ は共に偶数である。

また、 $\frac{B^2}{4} = \frac{C+A}{2} \cdot \frac{C-A}{2}$ であり、 A, C は互いに素より、

$\frac{C+A}{2}, \frac{C-A}{2}$ はともに平方数である。

よって、 $\frac{C+A}{2} = M^2, \frac{C-A}{2} = N^2$ とおくと、

$$A = (M^2 - N^2)$$

$$B = 2MN$$

$$C = (M^2 + N^2)$$

を得る。

よって、成立。

とくに $\alpha = 1$ の場合を考えると、

正整数 $x_1, x_2, x_3, x_4, k_1, k_2$ を用いて補題2より、

$$m = k_1(x_1^2 - x_2^2)$$

$$n = 2k_1x_1x_2$$

$$p = k_2(x_3^2 - x_4^2)$$

$$q = 2k_2x_3x_4$$

とおくことができる。

このとき、 (a, b, c, e, g) が正整数となる。

また同様に、 $a^2 + b^2, c^2 + a^2$ は平方数より

正整数 $k_3, k_4, k_5, k_6, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4$

を用いて、

$$m = \frac{1}{2}\{k_3(y_1^2 - y_2^2) + k_3(y_3^2 - y_4^2)\}$$

$$n = k_3y_1y_2 + k_4y_3y_4$$

$$p = -k_3y_1y_2 + k_4y_3y_4$$

$$q = \frac{1}{2}\{-k_3(y_1^2 - y_2^2) + k_3(y_3^2 - y_4^2)\}$$

とすると、 (a, b, c, d, g) が正整数となる。

$$m = \frac{1}{2}\{k_5(z_1^2 - z_2^2) + k_6(z_3^2 - z_4^2)\}$$

$$n = k_5z_1z_2 + k_6z_3z_4$$

$$p = \frac{1}{2}\{-k_5(z_1^2 - z_2^2) + k_6(z_3^2 - z_4^2)\}$$

$$q = k_5z_1z_2 - k_6z_3z_4$$

とすると、 (a, b, c, f, g) が正整数となる。

3. 結論

3つの方法で a, b, c を表すことにより、 a, b, c, g

と、 d または e または f が正整数となる組を生成で

きるようになった。

4. 展望

今は5つの数が正整数となる組しか生成できないが、今後は6つの数が正整数となる組を生成できるようにしたい。

[3] 謝辞

ご助言いただいた佐々木悠輔先生、加藤慎也先生、小笠原涼太先生に感謝を申し上げます。

[4] 参考文献

なし