22411

完璧な完全直方体は存在するか

2627 土屋怜大

この研究では完璧な完全直方体が存在するための条件を絞ることを目的とする。整式$d^2+e^2+f^2=2g^2$が成り立つことが分かり、この式を満たす正整数の組(d,e,f,g)をExcelVBAを用いて探したところ、それらの数の差に規則性があることが分かった。eとfの差pと、fとgの差qを用いて、d,fを正整数mの関数として条件を絞った。

キーワード　正整数　ExcelVBA

１．定義

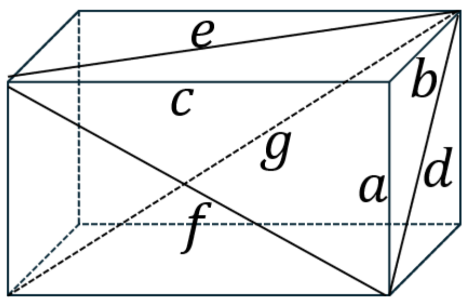
完璧な完全直方体とは直方体において、直方体の各辺、各面の対角線、空間の対角線すべての長さの比が正整数であるもの。空間の対角線の比が正整数であるという条件を除けば、直方体の各辺、各面の対角線が正整数である完全直方体は存在している。空間の対角線の条件を考えるかどうかを区別するため、この条件を考える場合を完璧な完全直方体と言うものとする。

$f(x)$をxを変数とするn次の多項式としたとき、$\deg\{f(x)\}=n$とする。

２．目的

完璧な完全直方体が存在しないことを示すことを最終目標とする。そのために本研究では完璧な完全直方体が、存在しうる条件をしぼることを目的とする。

３．仮説



（図-1）

直方体の各辺、各面の対角線、空間の対角線を（図-1）のようにおくことにより以下の式を得る。

$a^2+b^2=d^2$…①

$b^2+c^2=e^2$…②

$c^2+a^2=f^2$…③

$a^2+b^2+c^2=g^2$…④

これらより次の式を得る。

$d^2+e^2+f^2=2g^2$…⑤

これを満たす正整数の組(d,e,f,g)をExcelVBAを用いて探し、規則性を考える。

４．結果ⅰ

ExcelVBA用いて次の結果を得た。

（プログラム）

```
Sub defg()

Dim d As Long, e As Long, f As Long, g As Long, g1 As Long, k As Long, n As Long

n = 1
k = 1000

    For d = 1 To k
        For e = d + 1 To k
            For f = e + 1 To k
                g1 = d ^ 2 + e ^ 2 + f ^ 2
                g = Sqr(g1 / 2)
                    If (Int(Sqr(g1 / 2) = g)) Then
                        If (g > f) Then
                            Cells(n, 1).Value = n
                            Cells(n, 2).Value = d
                            Cells(n, 3).Value = e
                            Cells(n, 4).Value = f
                            Cells(n, 5).Value = g
                            n = n + 1

                        End If
                    End If
            Next f
        Next e
    Next d


End Sub
```

(結果)

d	e	f	g
11	19	20	21
13	27	28	29
16	19	21	23
17	47	48	49
19	59	60	61
20	31	33	35
22	38	40	42
23	25	32	33
23	87	88	89

5．考察ⅰ

以下$d<e<f$とする。

$e+2=f+1=g$という組が見つかり、

これらの整数は$m\in N$を用いて次のように表せる。

$$(d,e,f,g)=\left((6m\pm 1),(6m^2\pm 2m-1),(6m^2\pm 2m),(6m^2\pm 2m+1)\right)$$

また同様に$e+4=f+2=g$の場合、d,e,f,gの最小公倍数が 1 である組のみを考えると、

$$(d,e,f,g)=\left((12m\pm 4),(12m^2\pm 8m-1),(12m^2\pm 8m+1),(12m^2\pm 8m+3)\right)$$

が考えられる。

ここで、これらの組が全ての(d,e,f,g)の組を考えれていることを示す。

⑤$d^2+e^2+f^2=2g^2$について

$e+2=f+1=g$のとき、

$$d^2+(f-1)^2+f^2=2(f+1)^2$$
$$d^2=6f+1$$
$$d\equiv\pm 1\ (mod\ 6)$$

よって $d=6m\pm 1\ (m\in N)$

逆に$d=6m\pm 1$のとき$f=6m^2\pm 2m$となり成立。

同様に$e+4=f+2=g$のとき、

$$d^2+(f-2)^2+f^2=2(f+2)^2$$
$$d^2=12f+4$$
$$d\equiv\pm 2,\pm 4\ (mod\ 12)$$

よって $d=12m\pm 2,12m\pm 4\ (m\in N)$

ただし、$d=12m\pm 2$はd,e,f,gの最小公倍数が 1 にならないため$d=12m\pm 4$のみ考える

逆に$d=12m\pm 4$のとき$f=12m^2\pm 8m+1$となり成立。

6．考察ⅱ

ⅰのことをe,f,gの差に注目して考える。

$p,q\in N$を用いて、$e+p=f,f+q=g$と表し、d,fを$m\in N$の関数として、$d=d(m),f=f(m)$として考える。

⑤より次の式を得る。

$d(m)^2=2(p+2q)f(m)+(-p^2+2q^2)$…⑥

このとき、十分に大きなMに対して$M<m$で、$d(m)<f(m)-p$となり$d<e<f<g$を満たす。

⑥より、$2\deg\{d(m)\}=\deg\{f(m)\}$である.

$f(m)$を 2 次の関数だと仮定して、$\alpha,\gamma\in N,\beta\in Z$を用いて、

$f(m)=\alpha m^2+\beta m+\gamma$とおくことにより次を得る。

$$d(m)=2(p+2q)\alpha m^2+2(p+2q)\beta m+2(p+2q)\gamma+(-p^2+2q^2)$$

このとき$d(m)\in N[m]$であることから、

$2(p+2q)\gamma+(-p^2+2q^2)=s^2$として考え、

$\alpha=2(p+2q),\beta=\pm 2s$とすると、

$d(m)=2(p+2q)m\pm s$となるものがある。

$\therefore d(m)=2(p+2q)m\pm s$…⑦

$f(m)=2(p+2q)m^2\pm 2sm+\gamma$…⑧

しかし任意の正整数p,qに対してすべての(d,e,f,g)の組がこの式で表されているかは考えることができてない。そのため今後は存在しない範囲をしぼるという点で考え、考えるべきすべての(d,e,f,g)の組のうち上記の式を満たしている(d,e,f,g)の組が完璧な完全直方体となるかを考えるものとする。

7．考察ⅲ

ⅱで求めた(d,e,f,g)にさらに条件を考える。

仮説・方法ⅰと同様に①②③④より次の式を得る。

$-d^2+e^2+f^2=2c^2$…⑨

cとeの差をrとおくと、$c+r=e=f-p$と表せるので⑨より次の式を得る。

$d(m)^2=2(p+2r)f(m)-(p^2+4pr+2r^2)$…⑩

⑥⑩より次の式を得る。

$4(r-q)f(m)-(2q^2+4pr+2r^2)=0$…⑪

これをmについての方程式と考えると方程式が正整数解mを持たなければならない。そのため少なくとも判別式Dは平方数である。

⑧を代入することにより次の式を得る。

$D=2^6(r-q)(p+q+r)(pq+2qr+rp)$…⑫

ここで$D>0$を示す。

$(p+q+r),(pq+2qr+rp)>0$より$r-q>0$を示す。

補題1

$F(x)=\sqrt{x+t}-\sqrt{x}(x>0,t>0)$とするとき$F(x)$は$x>0$で単調減少する。

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{1}{2}\left\{(x+t)^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right\}<0$$

よって、成立。

$$\begin{aligned} r&=e-c\\ &=\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{c^2}\\ q&=g-f\\ &=\sqrt{a^2+b^2+c^2}-\sqrt{a^2+c^2} \end{aligned}$$

補題1より$a^2+c^2>c^2$であるため、

$F(a^2+c^2)<F(c^2)$となり$r>q$が成り立つ。

以上より$D>0$となる。

しかし、逆にDが平方数であり、解mが正整数であっても(c, d, e, f, g)が条件を満たすとは限らない。

８．結論

⑥⑩で5正整数c, d, e, f, gを差p,q,rで考え、⑦⑧でmに関してp,q,rを用いて表した。⑫でDをp,q,rを用いて表してDが平方数、また⑪で解mが正整数であるという条件でしぼることにより、c, d, e, f, gが正整数となるものを見つけることができるようになった。

９．展望

考察ⅱでfをmの２次の関数と仮定しているため、今後はすべての(d,e,f,g)の組が⑦⑧の式で表せていることを示す。

１０．謝辞

ご助言いただいた佐々木悠輔先生、加藤慎也先生、小笠原涼太先生に感謝を申し上げます。

１１．参考文献

なし