

五次以上の方程式の解の公式は作れるか

3628 夏目未来

要旨

三次、四次方程式の解の公式は歴史的に研究されており、五次以上の方程式の解の公式が存在しないことはガロアによって証明されている。そこで、係数についてある条件を満たすとき、五次以上の方程式の解の公式を作ることができるという仮説を立てた。先行研究に特殊な六次方程式の代数的解法の論文があり、同様の解き方で五次、七次、八次方程式の解が存在する条件および解の公式を導出した。

本文

1. 目的

n 次方程式の解の公式は、三次方程式はカルダノ、四次方程式はフェラーリによって発見された。五次以上の方程式は一般に解の公式が存在しないことがガロアによって証明されている。そこで、五次以上の方程式でも解の公式を作ることができる場合があるかを調べる研究を行った。

2. 仮説

係数についてある条件を満たすとき、五次以上の方程式の解の公式を作ることができる。

3. 研究内容

特殊な六次方程式の代数的解法の論文をもとに、五次、七次、八次方程式の解の公式を導出する。

4. 五次方程式の解の公式

一般の五次方程式

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0 (a \neq 0) \dots$$

①は、

$$y = x + \frac{b}{5a}$$

と置き換えると、四次項の消えた形

$$y^5 + py^3 + qy^2 + ry + s = 0$$

に変形できる。ただし、 $s \neq 0$ とする。ここで、

$$\begin{cases} p = -\frac{2b^2}{5a^2} + \frac{c}{a} \\ q = \frac{4b^3}{25a^3} - \frac{3bc}{5a^2} + \frac{d}{a} \\ r = -\frac{3b^4}{125a^4} + \frac{3b^2c}{25a^3} - \frac{2bd}{5a^2} + \frac{e}{a} \\ s = \frac{4b^5}{3125a^5} - \frac{b^3c}{125a^4} + \frac{b^2d}{25a^3} - \frac{be}{5a^2} + \frac{f}{a} \end{cases}$$

である。

$y = \alpha + \beta$ とおくと、

$$\begin{aligned} &\alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5 \\ &\quad + p\alpha^3 + 3p\alpha^2\beta + 3p\alpha\beta^2 + p\beta^3 \\ &\quad + q(\alpha + \beta)^2 + r(\alpha + \beta) + s = 0 \\ &(\alpha^3 + \beta^3)(\alpha + \beta)^2 + 3\alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) \\ &\quad + 9\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) + p(\alpha^3 + \beta^3) \\ &\quad + 3p\alpha\beta(\alpha + \beta) + q(\alpha + \beta)^2 \\ &\quad + r(\alpha + \beta) + s = 0 \end{aligned}$$

$$(\alpha^3 + \beta^3 + q)y^2 + \{9(\alpha\beta)^2 + 3p\alpha\beta + r\}y + \{3\alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) + p(\alpha^3 + \beta^3) + s\} = 0$$

となるので、

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 + q = 0 \dots \text{②} \\ 9(\alpha\beta)^2 + 3p\alpha\beta + r = 0 \dots \text{③} \\ 3\alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) + p(\alpha^3 + \beta^3) + s = 0 \dots \text{④} \end{cases}$$

という関係があれば①は解ける。②、③より

$$\alpha^3 + \beta^3 = -q, \quad \alpha\beta = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{6} \dots (*)$$

これを④に代入すると、

$$pq - 2s = \mp q\sqrt{p^2 - 4r}$$

である。ただし、(*)と複号同順。

よって、 $pq - 2s$ の正負によって、(*)の±が決

まる。①が解けるための条件は

$$(pq - 2s)^2 = q^2(p^2 - 4r)$$

である。このとき、 α^3 、 β^3 は、 z の二次方程式

$$z^2 + qz + \left(\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{6}\right)^3 = 0$$

の2解であるから、

$$z = -\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{q^2 + \frac{2p^3 - 6pr \pm 2(r - p^2)\sqrt{p^2 - 4r}}{27}}$$

α

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{q^2 + \frac{2p^3 - 6pr \pm 2(r - p^2)\sqrt{p^2 - 4r}}{27}}}$$

β

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{q^2 + \frac{2p^3 - 6pr \pm 2(r - p^2)\sqrt{p^2 - 4r}}{27}}}$$

とすると、①の5つの解のうちの3つは

$$x = -\frac{b}{5a} + \alpha + \beta, \quad -\frac{b}{5a} + \alpha\omega + \beta\omega^2, \\ -\frac{b}{5a} + \alpha\omega^2 + \beta\omega$$

ただし、 ω は1の3乗根のうち虚数のもの。

5. 七次方程式の解の公式

一般の七次方程式

$$ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h = 0$$

($a \neq 0$)...⑤ は、

$$y = x + \frac{b}{7a}$$

と置き換えると、六次項の消えた形

$$y^7 + py^5 + qy^4 + ry^3 + sy^2 + ty + u = 0$$

に変形できる。ただし、 $u \neq 0$ とする。ここで、

$$\begin{cases} p = -\frac{3b^2}{7a^2} + \frac{c}{a} \\ q = \frac{10b^3}{49a^3} - \frac{5bc}{7a^2} + \frac{d}{a} \\ r = \frac{15b^4}{343a^4} + \frac{10b^2c}{49a^3} - \frac{4bd}{7a^2} + \frac{e}{a} \\ s = \frac{10b^5}{2401a^5} - \frac{10b^3c}{343a^4} + \frac{6b^2d}{49a^3} - \frac{3be}{7a^2} + \frac{f}{a} \\ t = \frac{5b^6}{16807a^6} + \frac{5b^4c}{2401a^5} - \frac{4b^3d}{343a^4} + \frac{3b^2e}{49a^3} - \frac{2bf}{7a^2} + \frac{g}{a} \\ u = \frac{b^7}{823453a^7} - \frac{b^5c}{16807a^6} + \frac{b^4d}{2401a^5} - \frac{b^3e}{343a^4} \\ \quad + \frac{b^2f}{49a^3} - \frac{bg}{7a^2} + \frac{h}{a} \end{cases}$$

である。

$y = \alpha + \beta$ とおくと

$$\begin{aligned} & \{(\alpha^4 + \beta^4) + 14\alpha^2\beta^2 + 4p\alpha\beta + r\}y^3 \\ & + (4q\alpha\beta + s)y^2 + \{4\alpha\beta(\alpha^4 + \beta^4) - 8\alpha^3\beta^3 \\ & \quad + p(\alpha^4 + \beta^4) - 2p\alpha^2\beta^2 + t\}y \\ & + \{q(\alpha^4 + \beta^4) + 2q\alpha^2\beta^2 + u\} = 0 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{cases} (\alpha^4 + \beta^4) + 14\alpha^2\beta^2 + 4p\alpha\beta + r = 0 \dots \textcircled{6} \\ 4q\alpha\beta + s = 0 \dots \textcircled{7} \\ 4\alpha\beta(\alpha^4 + \beta^4) - 8\alpha^3\beta^3 + p(\alpha^4 + \beta^4) \\ \quad - 2p\alpha^2\beta^2 + t = 0 \dots \textcircled{8} \\ q(\alpha^4 + \beta^4) + 2q\alpha^2\beta^2 + u = 0 \dots \textcircled{9} \end{cases}$$

という関係があれば⑤は解ける。 $q = 0$ のとき、

⑨より $u = 0$ となるので、 $q \neq 0$ である。

⑦、⑨から

$$\alpha\beta = -\frac{s}{4q}, \quad \alpha^4 + \beta^4 = -\frac{s^2 + 8qu}{8q^2}$$

これを⑥と⑧に代入して整理すると

$$\begin{cases} 3s^2 - 4qu - 4pqs + 4rq^2 = 0 \\ s^3 + 4qsu - pqs^2 - 4pq^2u + 4tq^3 = 0 \end{cases}$$

これが解けるための条件である。

このとき、 α^4 、 β^4 は、 z の二次方程式

$$z^2 + \frac{s^2 + 8qu}{8q^2}z + \left(-\frac{s}{4q}\right)^4 = 0$$

の2解であるから

$$z = \frac{\pm 4\sqrt{4q^2u^2 + qs^2u} - s^2 - 8qu}{16q^2}$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{4\sqrt{4q^2u^2 + qs^2u} - s^2 - 8qu}{16q^2}}$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{-4\sqrt{4q^2u^2 + qs^2u} - s^2 - 8qu}{16q^2}}$$

とすると、⑤の7つの解のうちの4つは

$$x = -\frac{b}{7a} + \alpha - \beta, \quad -\frac{b}{7a} - \alpha + \beta,$$

$$-\frac{b}{7a} + ai + \beta i, \quad -\frac{b}{7a} - ai - \beta i$$

6. 八次方程式の解の公式

一般の八次方程式について、七次項の消えた形 $y^8 + py^6 + qy^5 + ry^4 + sy^3 + ty^2 + uy + v = 0 \dots ⑩$ (ただし、 $v \neq 0$ とする。) は、 $y = \alpha + \beta$ とおくと、

$$\begin{aligned} (4q\alpha\beta + s)y^3 + \{(8\alpha\beta + p)(\alpha^4 + \beta^4) + 48\alpha^3\beta^3 \\ + 14p\alpha^2\beta^2 + 4r\alpha\beta + t\}y^2 \\ + \{q(\alpha^4 + \beta^4) - 2q\alpha^2\beta^2 + u\}y \\ + \{(\alpha^4 + \beta^4)^2 \\ + (12\alpha^2\beta^2 + 4p\alpha\beta + r)(\alpha^4 + \beta^4) \\ - 28\alpha^4\beta^4 - 8p\alpha^3\beta^3 - 2r\alpha^2\beta^2 \\ + v\} = 0 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{cases} 4q\alpha\beta + s = 0 \dots ⑪ \\ (8\alpha\beta + p)(\alpha^4 + \beta^4) + 48\alpha^3\beta^3 + 14p\alpha^2\beta^2 \\ + 4r\alpha\beta + t = 0 \dots ⑫ \\ q(\alpha^4 + \beta^4) - 2q\alpha^2\beta^2 + u = 0 \dots ⑬ \\ (\alpha^4 + \beta^4)^2 + (12\alpha^2\beta^2 + 4p\alpha\beta + r)(\alpha^4 + \beta^4) \\ - 28\alpha^4\beta^4 \\ - 8p\alpha^3\beta^3 - 2r\alpha^2\beta^2 + v = 0 \dots ⑭ \end{cases}$$

という関係があれば解ける。

$q = 0$ のとき、⑪、⑬より、 $s = 0$ 、 $u = 0$ となるので、⑩が y^2 の四次方程式となる。

$q \neq 0$ のとき、⑪、⑬から

$$\alpha^4 + \beta^4 = \frac{s^2 - 8qu}{8q^2}, \quad \alpha\beta = -\frac{s}{4q}$$

これを⑫と⑭に代入すると

$$\begin{cases} -s^3 + 2qsu + pqs^2 - pq^2u - q^2rs + q^3t = 0 \\ s^2u - qu^2 - pqsu + q^2ru - q^3v = 0 \end{cases}$$

これが解けるための条件である。この関係式が成立するとき、 α^4 、 β^4 は、 z の二次方程式

$$z^2 - \frac{s^2 - 8qu}{8q^2}z + \left(-\frac{s}{4q}\right)^4 = 0$$

の2解であるから、

$$z = \frac{\pm 4\sqrt{4q^2u^2 - qs^2u} + s^2 - 8qu}{16q^2}$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{4\sqrt{4q^2u^2 - qs^2u} + s^2 - 8qu}{16q^2}}$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{-4\sqrt{4q^2u^2 - qs^2u} + s^2 - 8qu}{16q^2}}$$

とすると、⑩の8つの解のうちの4つは

$$y = \alpha - \beta, \quad -\alpha + \beta, \\ ai + \beta i, \quad -ai - \beta i$$

よって、一般の八次方程式の解も求められる。

7. 考察

係数についてある条件を満たせば、五次、七次、八次の方程式でも解の公式を作ることができる。

8. 展望

- ・五次は残り2つ、七次は残り3つ、八次は残り4つの解の求め方を考察する
- ・九次、十次…と解ける方程式を増やす
- ・公式や条件式の共通点を見つける

9. 謝辞

ご協力いただいた数学科の先生方ありがとうございました。

10. 参考文献

特殊な6次方程式の代数的解法

<http://www6338.la.coocan.jp/mathematics/6th-equation.pdf>

五次方程式の解の公式の存在条件

<https://www.nagano->

[c.ed.jp/seiho/intro/risuka/kadaikenq/pape](https://www.nagano-ed.jp/seiho/intro/risuka/kadaikenq/pape)

[r/2014/2014-1.pdf](https://www.nagano-ed.jp/seiho/intro/risuka/kadaikenq/paper/2014/2014-1.pdf)