32301

3の剰余類 コラッツ予想

3527 林莉乃

要旨
　コラッツ予想（未解決問題）は「ある自然数ｎに対し，ｎが偶数ならば1/2倍して、ｎが奇数ならば3倍して１をたすという操作を繰り返す。この操作を繰り返し行うと、すべての自然数ｎが必ず１に帰着する。」というものである。コラッツ予想が、条件を変えると成立しない稀な性質であることを調べることにした。「3倍して１たす」の操作を「5倍して１たす」の操作に変更したり、自然数ｎを「偶奇」の操作ではなく、「3の剰余類」による操作に変更したりして、1に帰着するかを、数列の形や増加する操作と減少する操作の頻度の違いに注目して研究をした。操作を変えると１に帰着しない自然数ｎがあるが、操作や頻度の違いだけでは１へ帰着するかの判断は難しいと考える。

（コラッツ予想の例）
例１）３から始まる数列
　３→10→５→16→８→４→２→１

例２）7から始まる数列
　７→22→11→34→17→52→26→13→40
　→20→10→５→16→８→４→２→１

１．目的
　コラッツ予想の操作を他の操作に変えて１に帰着するかを考察することで、コラッツ予想が条件を変えると成立しない調和のとれた美しい未解決問題であることを実感する。

２．仮説
(1)　「３倍して１たす」の操作を他の操作に変えると１に帰着しない自然数ｎが存在する。

(2)　操作の仕方で、１に帰着するのか判断ができる。

(3)　「偶奇（２の剰余類)」ではなく「２以外の剰余類」による操作方法へ変えたとき、１に帰着する操作をつくることができる。

(4)　アップルゲートとラガリアスの研究「Applegate－Lagarias の定理」を参考に、3の剰余類（mod3）コラッツ予想に対し、大きくなりやすさが $\frac{1}{2}$ 以上の自然数 n は無限個存在する。

３．使用したソフトと図
　計算にはExcelを使った。

４．研究内容
(1)　「3倍して１たす」の操作を「4倍して１たす」の操作に変える。つまり、

≪4n+1 コラッツ予想≫
　自然数 n に対して
　　n が奇数なら $4n+1$
　　n が偶数なら $n/2$
　という操作を繰り返す。

(2)　「3倍して１たす」の操作を「5倍して１たす」の操作に変える。つまり、
≪5n+1 コラッツ予想≫
　自然数 n に対して
　　n が奇数なら $5n+1$
　　n が偶数なら $n/2$
　という操作を繰り返す。

(3)　≪5n+1 コラッツ予想≫の【７からつくった数列】に見られる数列の形が、【１から逆につくった数列】で作る。

(4)　次の操作を考える。
≪３の剰余類（mod3）コラッツ予想≫
　３を法（mod3）として
　$n/3 \quad (n \equiv 0)$
　$(4n-1)/3 \quad (n \equiv 1)$
　$(4n+1)/3 \quad (n \equiv 2)$　を繰り返す。

(5)　研究(4)≪３の剰余類(mod3)コラッツ予想≫の逆向き操作を考える。
≪３の剰余類（mod3）コラッツ予想≫

$$\begin{cases} \frac{n}{3} & n \equiv 0 \ \ mod.3 \\ \frac{4n-1}{3} & n \equiv 1 \ \ mod.3 \\ \frac{4n+1}{3} & n \equiv 2 \ \ mod.3 \end{cases}$$

に対し、
≪３の剰余類（mod3）コラッツ予想≫の逆向き操作は、

$$\begin{cases} 3n & n \equiv 0,2 \ \ mod.4 \\ \frac{3n+1}{4} & n \equiv 1 \ \ mod.4 \\ \frac{3n-1}{4} & n \equiv 3 \ \ mod.4 \end{cases}$$

である。

この数列を考え、数の大きくする操作の回数（頻度、割合）を考える。

５．研究

(1)　「４倍して１たす」の操作に変え、数列を書き出していく。

例３）

３→13→53→213→853→3413→13653→…

3 から作った数列は、奇数が繰り返され１に帰着することはなく、成立しない。

(2)　「5 倍して１たす」の操作に変え、数列を書き出していく。

例４）３→16→８→４→２→１

例５）５→26→13→66→33→166→83→416→208→104→52→26→13→・・・

例６）７→36→18→９→46→23→116→58→29→146→73→366→183→916→458→・・

例７）17→86→43→216→108→54→27→136→68→34→17→86→43→・・・

例４）は、１に帰着した。
例５）及び、例７）は、13 または 17 からはじまる繰り返しが発生じて、１に帰着しなかった。
例６）増加の傾向がみられるが、１に帰着するかどうかの判断ができなかった。(Excel の桁数を越えてしまった。)

(3)　一の位が６のとき分岐がおこることが分かった。また、(2)例６）【７からつくった数列】の操作の仕方に着目する。具体的に、例８）のように、増加する操作を上段、減少させる操作を横に書き並べた場合、【７からのつくった数列】の､「分岐後１つ目の数で分岐し、その後２つ目の数で分岐する形（以降、上横２上上型)」に着目する。

例８）【７からつくった数列】（上横２上上型）
↑：５倍して１たす操作、←：1/2 倍の操作

←29←58←116←…
↑
23←46←…
↑
9←18←36←…
↑
7←…

この上横２上上型が、【１から逆につくった数列】（例９））に存在しないように思えたため、この形の存在について調べる。

例９）【１から逆につくった数列】

1←2←4←8←16←32←64←128←…
↑
3←6←12←24←48←96←…
↑　↑
1　19←38←76←…
↑
15←…
（分岐なし）

つまり、上横２上上型の数列となる自然数 l,n,m を求める。

（上横２上上型）

$5n+1$←…
↑
n（奇数）←$2n$←$4n$←…
↑
m（奇数）←$2m$←$4m$←…
↑
l（奇数）←…

分岐後の数はすべて奇数だから、l,m,n は奇数である。数列より、

$$\begin{cases} 5l+1=4m\ldots① \\ 5m+1=2m\ldots② \end{cases}$$

また、l,m,n は奇数より、

$$\begin{cases} l=2l'+1 \\ m=2m'+1 \\ n=2n'+1 \end{cases}$$

①②に代入して整理すると、

① $5\left(2l'+1\right)+1=4\left(2m'+1\right)$
$10l'+6=8m'+4$
$5l'+1=4m'$ …①'

② $5\left(2m'+1\right)+1=2(2n'+1)$
$10m'+6=4n'+2$
$5m'+2=2n'$ …②'

①' ②' より

$$\begin{cases} 4m'\equiv 1(mod.5) \\ 5m'\equiv 0(mod.2) \end{cases}$$

この２式から、m' は５でわると４余る数かつ偶数である。つまり，０以上の整数a,bを使って
$m'=5a+4,\ m'=2b$…(*)と表せる。
１次不定方程式 $5a+4=2b$を、特殊解を、
$a=2,\ b=7$ として解くと、
$a=2c+2,\ b=5c+7$ （整数c）であり、
(*)に代入して、
$m'=10(c+1)+4$
cは整数なので、$m'=10k+4$ （k:整数）
①' ②' に代入すると、l',n' を求めることができる。

以上より

$$\begin{cases} l = 16k + 7 \\ m = 20k + 9 \\ n = 50k + 23 \end{cases}$$ となる。

この k に 0～1300 を代入して、それぞれの数に対して、800 回の「自然数nに対してnが奇数なら$5n + 1$、nが偶数なら$n/2$」の操作を繰りかえし行い、１に帰着する数列の存在をいくつか確認した。（例 10、11、12）

例 10）
k＝21、702、918　のときは、 2^{12}となり１に帰着した。
例 11）
k＝668、1069 のときは、2^8　となり１に帰着した。
例 12）
k＝813 のとき　2^4　となり１に帰着した。

つまり、【７からつくった数列】に現れる上横２上上型をしている数列で、１に帰着する数列の存在を確認することができた。

（4）　≪３の剰余類（mod3）コラッツ予想≫は、２～1000 から始まる数列に対して、すべての１に帰着した。

例 13）

```
        1
        ↑
  2 → 3
        ↑
        9 ――――――→ 7 ―――→ 5 → 4 →
        ↑                ↑            ↑
  20→27          16→21          15→11→ 8 →
        ↑                ↑            ↑     ↑
     81→61            63→47        45    33
        ↑                ↑            ↑     ↑
182→243         142→189
        ↑                ↑
```

この≪３の剰余類（mod3）コラッツ予想≫は、次のような性質をもつ。
性質１）偶数（2k）となる数は、６の倍数（6k）であるため、数列が分岐していることはない。（例 14）
（例 14）
2← 6 ←18←54←162←　……（分岐なし）
4 ←12←36←108←324←　……（分岐なし）

性質２）≪３の剰余類（mod3）コラッツ予想≫の$(4n-1)/3$　$(n \equiv 1)$と$(4n+1)/3$　$(n \equiv 2)$の２つの操作で得られる数で、同じ数になることはないため、分岐は起きても２本までである。（例 15）

性質３）３を４で割った余りが３、3^2を４で割った余りが１であるため、≪３の剰余類（mod3）コラッツ予想≫の$(4n-1)/3$　$(n \equiv 1)$と$(4n+1)/3$　$(n \equiv 2)$ の操作が交互に行われていることが分かる。（例 15）

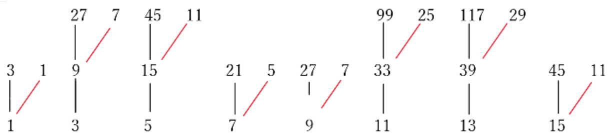
（例 15）

```
   2          20          182
   ↓           ↓            ↓
1 ←3← 9 ←27←81←243←729　……
          ↑           ↑            ↑
          7          61          547
```

（5）　$mod.4^2$で数列を分けて考え、1～16 の数に帰着する数列を書き出す。ただし、研究(4)から偶数の先には分岐がないことが分かったため、偶数の分岐はあらかじめ書かないことにする（いわゆる、枝の剪定を行っておく）。

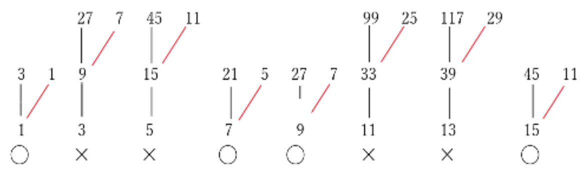
数を大きくなりやすさをみていく。「大きくなりやすさ」は$\frac{\text{数を大きくする操作（赤の枝）}}{\text{全操作（黒の枝、赤の枝）}}$で判断する。

①基準 1/2



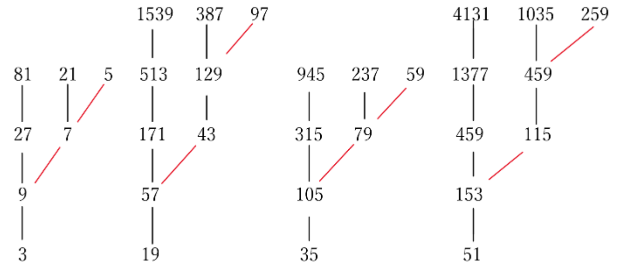
上の数列で大きくする割合は１または $\frac{1}{2}$であるので基準を満たす。$mod.4^2$の仲間分けなので 17 以降、17［$1(mod.4^2)$］は１と、19［$3(mod.4^2)$］は３と、のように同形をとる。よって大きくなりやすさが $\frac{1}{2}$ 以上の自然数 n は無限個存在するといえる。
ここで、さらに基準を厳しくして、大きくなりやすさ$\frac{3}{5}$以上を満たすかをみる。

②基準 3/5



上数列より、「３、５、11、13」では基準を満たさない。
よって、$mod.4^3$による仲間分け、枝分かれ３本までの判断をする。

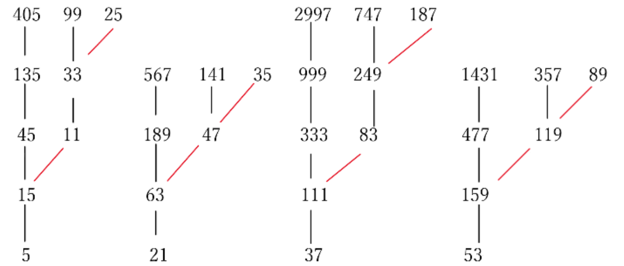
②（$mod.4^3$仲間分け 3 の仲間）



「３、35」…大きくする割合$\frac{2}{3}$、基準を満たす

「19、51」…大きくする割合$\frac{1}{2}$、基準を満たさない

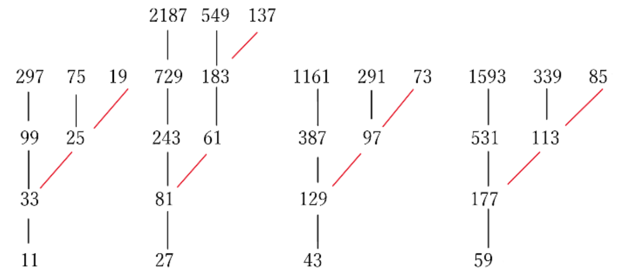
②（$mod.4^3$仲間分け 5 の仲間）



「21、53」…大きくする割合$\frac{2}{3}$、基準を満たす

「5、37」…大きくする割合$\frac{1}{2}$、基準を満たさない

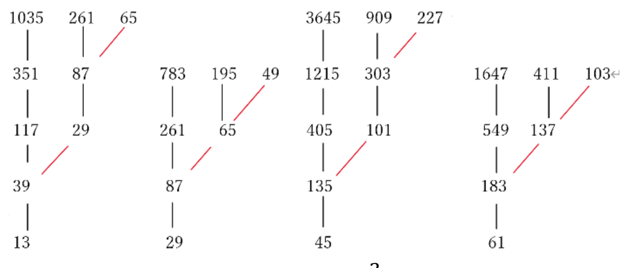
②（$mod.4^3$仲間分け 11 の仲間）



「11、43、59」…大きくする割合$\frac{2}{3}$、基準を満たす

「27」…大きくする割合$\frac{1}{2}$、基準を満たさない

②（$mod.4^3$仲間分け 13 の仲間）

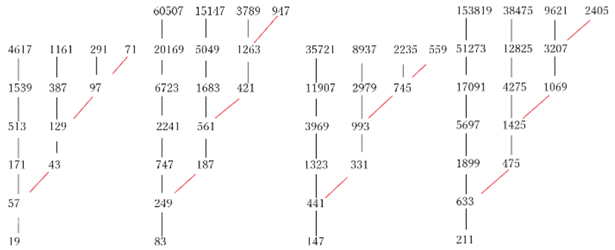


「29、45」…大きくする割合$\frac{2}{3}$、基準を満たす

「13、61」…大きくする割合$\frac{1}{2}$、基準を満たさない

上記の条件を満たさなかった数に対して、さらに、$mod.4^4$ による仲間分け、枝分かれ 4 本までの判断に移る。

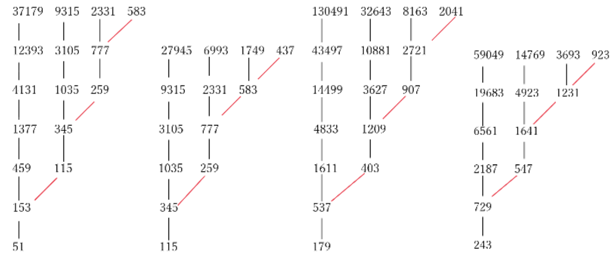
②（$mod.4^4$仲間分け 19 の仲間(3 の仲間)）



「19、147」…大きくする割合$\frac{3}{5}$、基準を満たす

「83、211」…大きくする割合$\frac{1}{2}$、基準を満たさない

②（$mod.4^4$仲間分け 51 の仲間(3 の仲間)）



「115、243」…大きくする割合$\frac{3}{5}$、基準を満たす

「51、179」…大きくする割合$\frac{1}{2}$、基準を満たさない

また、$mod.4^4$仲間分け 19 の仲間(3 の仲間)の「83」は 35 本枝分かれまでの判断で$\frac{35}{57}$で基準を満たす。

６．考察

(1)　$4n+1$は奇数である。更に、$4(4n+1)+1$も奇数である。常に奇数が現れるため、操作を繰り返しても１に帰着することはない。

「4 倍」の操作に限らず「偶数倍」の操作の場合、数字が単調に増加していく数列が存在する。よって、１に帰着しない自然数 n が存在する。

(2)　微小な変化を無視し、数の推移をみた。

研究(2)の、「nが奇数なら５倍して１たす」という操作は、必ず偶数が表れるため、操作を次のように変える。

nが奇数なら $(5n+1)/2$ 、

nが偶数なら、$n/2$ の操作を繰り返す。

研究(2)でみられた増加の傾向がありそうな「７から始めた数列」で、Excel を用いて 400 回の操作を行った。

他にも、「７から始めた数列」とは異なる形で、増加の傾向がありそうな数列として、「21 から始めた数列」と、「25 から始めた数列」にも同様の操作を行った。

７→18→９→23→58→29→73→183→458→229→573→…

400 回のうち

７から始めた数列のときは

奇数が 193 回、偶数 207 回現れた。
21 から始めた数列のときは
　奇数 192 回偶数 208 回現れた。
25 から始めた数列のときは
　奇数 191 回偶数 209 回現れた。
これをほぼ同じくらいの割合だと判断した。
また、「nが奇数なら$(5n+1)/2$」の「＋1」は、変化する量がとても小さいため、無視できるものとみると、奇数のときは数を 5/2 倍、偶数の時は数を 1/2 倍している。２つのことから、この操作は、数を 1/2 の割合で 5/2 倍し、1/2 の割合で 1/2 倍しているということになる。これは相乗平均にして、

$$\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}} \fallingdotseq 1.12 > 1$$

である。1.12 倍し続けるということは数を増加させていくことになると考えられる。
なお、コラッツ予想の本来の操作である、「自然数nに対してnが奇数なら$(3n+1)/2$、nが偶数なら$n/2$」でも、偶奇の現れる割合はほぼ同じで、数を 1/2 の割合で 3/2 倍し、1/2 の割合で 1/2 倍していることになり、相乗平均にして、

$$\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}} \fallingdotseq 0.86 < 1$$

である。0.86 倍し続けるということは、数を小さくしていくことになる。このため、コラッツ予想の本来の操作は、数が１に帰着しやすいと考えられた。さらに、「5 倍」の操作に変更したとき、偶数が現れる頻度が多いほうが、１に帰着しやすいのではないかと推測した。

(3)　数列では研究(3)のように三元の一次不定方程式をとけば、数列のなかの狙った形をつくりだすことができる。【７からつくった数列】にみられた形が【１から逆につくった数列】にも登場するため、数列の形と“１に帰着するかどうか”には関係がないのではと考えられる。

(4)　mod.4 や mod.5 にして、同じような操作を作ることで１に帰着する操作をつくれるのではないかと考えた。

≪mod.4（その１）≫
$n/4 \quad (n\equiv 0)\ \ mod.4$
$(5n-1)/4 \quad (n\equiv 1)\ \ mod.4$
$(5n-2)/4 \quad (n\equiv 2)\ \ mod.4$
$(5n-3)/4 \quad (n\equiv 3)\ \ mod.4$
これは
$(5n-2)/4 \quad (n\equiv 2)\ \ mod.4$　が 2 から始めると数列は常に 2 の繰り返しになり、
$(5n-3)/4 \quad (n\equiv 3)\ \ mod.4$　が 3 から始めると数列は常に 3 の繰り返しになる。
よって、次の操作に変えた。
≪mod.4（その２）≫
$n/4 \quad (n\equiv 0)\ \ mod.4$
$(5n-1)/4 \quad (n\equiv 1)\ \ mod.4$
$(5n+2)/4 \quad (n\equiv 2)\ \ mod.4$
$(5n+1)/4 \quad (n\equiv 3)\ \ mod.4$
これで≪mod.4（その１）≫で起こる 2 及び、3 の繰り返しは解消される。しかし、新たに９からはじまる数列のときに次のようなループが起きた。
９→11→14→18→23→29→36→９
よって，さらに次の操作に変えた。
≪mod.4（その３）≫
$n/4 \quad (n\equiv 0)\ \ mod.4$
$(5n+3)/4 \quad (n\equiv 1)\ \ mod.4$
$(5n+2)/4 \quad (n\equiv 2)\ \ mod.4$
$(5n+1)/4 \quad (n\equiv 3)\ \ mod.4$
これは、９からはじまる数列も１に帰着した。
　９→12→３→４→１
しかし、23 はじまる数列で、次のようなループが起きた
23→29→37→47→59→74→93→117→147→184→46→23
なお、≪mod.4(その２)≫の 9 からのループに関係する数以外の、1000 までのすべての自然数はこの操作で１に帰着し、≪mod.4(その３)≫の 23 のループに関係する数以外の、1000 までのすべての自然数はこの操作で１に帰着する。

≪mod.5（その１）≫
$n/5 \quad (n\equiv 0)\ \ mod.5$
$(6n-1)/5 \quad (n\equiv 1)\ \ mod.5$
$(6n-2)/5 \quad (n\equiv 2)\ \ mod.5$
$(6n-3)/5 \quad (n\equiv 3)\ \ mod.5$
$(6n-4)/5 \quad (n\equiv 4)\ \ mod.5$
これは、≪mod.4（その１）≫と同じように，2，3，4 は繰り返しが起こる。よって、次の操作に変えた。

≪mod.5（その２）≫
$n/5 \quad (n\equiv 0)\ \ mod.5$
$(6n+4)/5 \quad (n\equiv 1)\ \ mod.5$
$(6n+3)/5 \quad (n\equiv 2)\ \ mod.5$
$(6n+2)/5 \quad (n\equiv 3)\ \ mod.5$
$(6n+1)/5 \quad (n\equiv 4)\ \ mod.5$
これは、1000 までのすべての自然数が１に帰着した。

(5)　３を法としたコラッツ予想に対し、大きくなりやすさが $\frac{1}{2}$ 以上の自然数 n は無限個存在する操作であるが、１に帰着できる、珍しい操作である。
基準を満たさなかった数に対しても基準を満たすまで枝分かれを増やしていくと、すべての数に

ついて$\frac{3}{5}$の割合で増加していくことが確かめられ、大きくなりやすさが $\frac{3}{5}$ 以上の自然数 n は無限個存在する操作であるといえそうである。

７．展望

増やす操作と減らす操作の回数や、逆につくった経路の形に着目して、１に帰着する操作について考えたい。

研究(2)（「3倍」の操作を「5倍」の操作に変える）において７のときに本当に増加傾向があるのか検証したい。

研究(2)（「3倍」の操作を「5倍」の操作に変える）においてループに数列（13または17からはじまる数列）についての特徴や理由を探りたい。

研究(5)で「大きくなりやすさが$\frac{3}{5}$以上の自然数 n は無限個存在する。」といえるまで計算を進める。

８．まとめ

本来のコラッツ予想の設定（3倍して１たす、mod.2(偶奇)）には他の設定(5倍して１たすや、mod.4、mod.5）にはない何かがあり、操作方法や経路の仕組みをから、数列の推移の理由を探ることが難しい。このことが、コラッツ予想の面白さ、すばらしさだと感じた。また、広義に捉えると、コラッツ予想はだんだん数を小さくする操作をしおり、うまくできていてすごい。

コラッツ予想が大きくする操作が多かったのと同様に、３の剰余類コラッツ予想も数を大きくする操作が多そうであり、珍しい数の推移をすると感じた。法とする数を変えた操作でコラッツ予想のような稀な性質が生み出せそうで面白い。

９．謝辞

ご協力いただいた、九州大学助教松坂俊輝先生、本校数学科の先生方、ありがとうございました。

１０．参考

Applegate－Lagarias の定理