

# 線形計画法の活用

3633 森 裕子 3520 曾我 優希 3535 山内 敬太

## 要旨

数学Ⅱ(3章)「図形と方程式」の最大値の問題がある。2種類の原料(原料P, Q)から2種類の製品(製品X, Y)ができるとき、販売価格の総額の最大値を、図形を用いて求めるもの(線形計画法)である。そこで、原料の種類や製品の種類を増やすとどうなるのか気になり研究を始めた。原料を1つ増やすと条件式が増え、製品を1つ増やすと次元が1つ増えることが分かった。そして、3次元における最大値の求め方を考え、条件式の係数から最大値が判断できないか研究した。

### 1. 目的

- ① どの条件を変えたら次元が変わるか調べる。
- ② 3次元の時の最大値の求め方を調べる。
- ③ 3次元の時は係数から判断できるか調べる。
- ④ 4次元の時の最大値の求め方を調べる。

### 2. 事前準備

教科書の問題とその解法

〈問題〉

ある工場において、製品A, Bを1トン生産するのに必要な原料P, Qの量、販売価格および1日当たりの原料の最大量は下の表の通りである。製品A, Bの総金額を最大にするには、A, Bを何トンずつ生産すればよいか。

〈表〉

	原料P	原料Q	価格
製品X	3t	1t	2万円
製品Y	1t	2t	1万円
最大量	9t	8t	

〈解法〉

製品X, Yをx, yトン生産するとする。

$$(x \geq 0, y \geq 0)$$

原料Pについて、 $3x+y \leq 9$

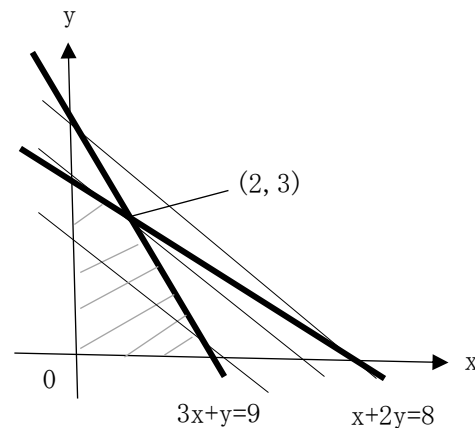
原料Qについて、 $x+2y \leq 8$  となる。… (\*)

価格は、 $2x+y$ (万円)である。

ここで、 $k=2x+y$ とすると、

傾き-2、y切片kの直線を表す。… (\*\*)

(\*)の領域を図示し、(\*\*)の図形から、直線 $3x+y=9$ と $x+2y=8$ の交点である(2, 3)のとき最大となる。



### 3. 仮説

- ① 原料を増やすと条件式は増えるが、次元は変わらない。製品を増やすと次元が増える。
- ② 共有点が最大値となる。
- ③ 係数の比を使って判断できる。
- ④ ②、③と同様に求められる。

### 4. 使用した道具、ソフト

• Excel2016

## 5. 研究の手順

### ① 原料を1つ増やすとき (原料 R を追加)

	原料 P	原料 Q	原料 R	価格
製品 X	3t	1t	4t	2 万円
製品 Y	1t	2t	1t	1 万円
最大	9t	8t	7t	

製品 X、Y を  $x$ 、 $y$  トン生産するとする。

原料の式:  $3x+y \leq 9$   $x+2y \leq 8$   $4x+y \leq 7$

価格の式:  $k=2x+y$

### ② 製品を1つ増やすとき (製品 C を追加)

	原料 P	原料 Q	価格
製品 X	3t	1t	2 万円
製品 Y	1t	2t	1 万円
製品 Z	2t	3t	3 万円
最大	9t	8t	

製品 X、Y、Z を  $x$ 、 $y$ 、 $z$  トン生産するとする。

原料の式:  $3x+y+2z \leq 9$   $x+2y+3z \leq 8$

価格の式:  $k=2x+y+3z$

③ ①、②で3次元となったときの  $k$  の式の係数の変化によって最大値がどう変わるかエクセルを利用して調べる。

### ④ ②に製品をさらに1つ増やすとき

(製品 D を追加)

	原料 P	原料 Q	価格
製品 X	3t	1t	2 万円
製品 Y	1t	2t	1 万円
製品 Z	3t	4t	3 万円
製品 W	4t	5t	4 万円
最大	10t	12t	

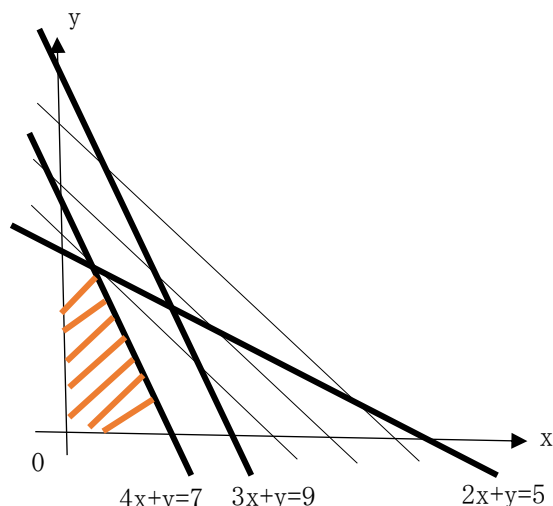
製品 X、Y、Z、W を  $x$ 、 $y$ 、 $z$ 、 $w$  トン生産するとする。

原料の式:  $3x+y+3z+4w \leq 10$   $x+2y+4z+5w \leq 12$

価格の式:  $k=2x+y+3z+4w$

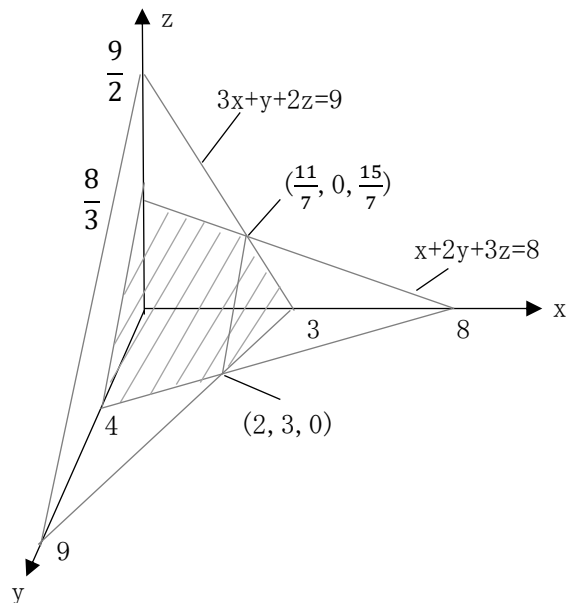
## 6. 結果

### ① 原料を1つ加えたとき



$k=2x+y$  より、傾き-2、 $y$ 切片  $k$  の直線を表す。この領域を図示し、図形から、最大値は  $2x+y=5$  と  $4x+y=7$  の交点、すなわち、 $(x, y) = (\frac{2}{3}, \frac{11}{3})$  のときである。

### ② 製品を1つ加えたとき



平面 P:  $3x+y+2z=9$ 、Q:  $x+2y+3z=8$  について

(i) 2つの文字に0を代入したとき

P:  $(x, y, z) = (3, 0, 0), (0, 9, 0), (0, 0, \frac{9}{2})$

Q:  $(x, y, z) = (8, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, \frac{8}{3})$

各文字の小さいほうが含まれている座標(原点に近い座標)は、

$$(x, y, z) = (3, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, \frac{8}{3}) \dots \text{候補 1}$$

(ii) 1つの文字に0を代入するとき

$$(x, y, z) = (\frac{11}{7}, 0, \frac{15}{7}), (2, 3, 0) \dots \text{候補 2}$$

$k=2x+y+3z$ に各点を代入すると順に

$$6, 4, 8, \frac{67}{7}, 7$$

よって、 $(x, y, z) = (\frac{11}{7}, 0, \frac{15}{7})$  のとき

最大値  $\frac{67}{7}$  となる。

\*ベクトルで $(\frac{11}{7}, 0, \frac{15}{7})$  のときに  $k$  が最大であることを示す。

$(2, 3, 0), (\frac{11}{7}, 0, \frac{15}{7})$  を通るベクトルを

$$\vec{a} = (\frac{3}{7}, -3, \frac{15}{7})$$

平面  $k=2x+y+3z$  の法線ベクトルを  $\vec{b} = (2, 1, 3)$

$\vec{a}$  と  $\vec{b}$  がなす角が鋭角のとき、 $(2, 1, 3)$  に垂直な平面は先に  $(\frac{11}{7}, 0, \frac{15}{7})$  を通る。

$\vec{a}$  と  $\vec{b}$  がなす角が鈍角のとき、 $(2, 1, 3)$  に垂直な平面は先に  $(2, 3, 0)$  を通る。

$$\text{内積 } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{18}{7}$$

$$|\vec{a}| = \frac{15\sqrt{3}}{7}$$

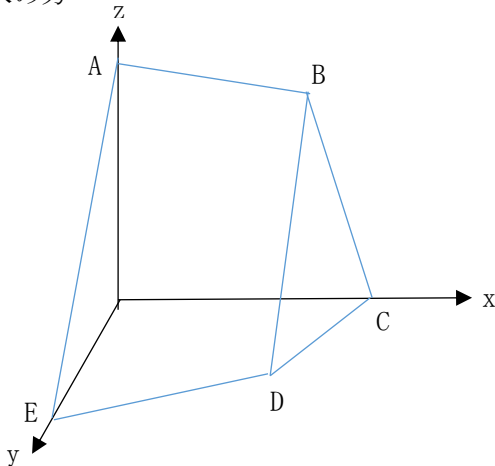
$$|\vec{b}| = \sqrt{14}$$

$$\frac{18}{7} = \frac{15\sqrt{3}}{7} \cdot \sqrt{14} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{42}}{35} > 0 \text{ より、} \theta \text{ は鋭角である。}$$

よって、 $(2, 1, 3)$  に垂直な平面は先に  $(\frac{11}{7}, 0, \frac{15}{7})$  を通るので、このとき  $k$  は最大である。

③ 3次元における係数の変化による最大値の求め方



上図は結果③で求めた領域のみを示している。

共有点

$$A = (0, 0, \frac{8}{3})$$

$$B = (\frac{11}{7}, 0, \frac{15}{7})$$

$$C = (3, 0, 0)$$

$$D = (2, 3, 0)$$

$$E = (0, 4, 0)$$

元の平面の式  $k=2x+y+3z$

この法線ベクトルは  $(2, 1, 3)$  である。

この平面の式の係数を変えることで最大値がどうなるか調べる

(1)  $z=0$  のとき、 $x$  と  $y$  の係数比について考える。

平面が C、D に接するとき  $(3, 1, 0)$

平面が D、E に接するとき  $(1, 2, 0)$

x/y	...	$\frac{1}{2}$	...	3	...
C				○	○
D		○	○	○	
E	○	○			

(2) (1)でEが最大となったとき、 $y$  と  $z$  の係数比について

平面が A、E に接するとき  $(2, 6, 9)$

y/z	...	$\frac{2}{3}$	...
A	○	○	
E		○	○

(3) (1)でCまたはC、Dが最大となったとき、 $x$  と  $z$  の係数比について考える。

平面が A、B に接するとき  $(1, 1, 3)$

平面が B、C に接するとき  $(3, 1, 2)$

x/z	...	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{3}{2}$	...
A	○	○			
B		○	○	○	
C				○	○

\* (1)でD、Eが最大となったとき、 $x:z=1:3$  かどうかを調べ、 $1:3$  となったときは最大

A、B、D、E となり、 $1:3$  とならないときは最大がD、Eとなる。

(4) (1)でDが最大となったとき、ベクトルの内積について考える。

$$\overline{BD} = \left(\frac{3}{7}, 3, -\frac{15}{7}\right) = (1, 7, -5)$$

このベクトルと係数を変えた平面ベクトルとの内積が正のときの最大はD、負のときの最大はB、0のときの最大はB、Dとなる。

④ ②に製品をさらに1つ加えたとき

P:  $3x+y+3z+4w=10$ 、Q:  $x+2y+4z+5w=12$  の共有点について

(i) 3つの文字に0を代入したとき

$$P: (x, y, z, w) = \left(\frac{10}{3}, 0, 0, 0\right), (0, 10, 0, 0), \\ (0, 0, \frac{10}{3}, 0), (0, 0, 0, \frac{5}{2})$$

$$Q: (x, y, z, w) = (12, 0, 0, 0), (0, 6, 0, 0), (0, 0, 3, 0), \\ (0, 0, 0, \frac{12}{5})$$

各文字の小さいほうが含まれている座標(原点に近い座標)は、

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{10}{3}, 0, 0, 0\right), (0, 6, 0, 0), (0, 0, 3, 0), \\ (0, 0, 0, \frac{12}{5}) \dots (\text{候補 1})$$

(ii) 2つの文字に0を代入したとき

$$\begin{cases} 3z + 4w = 10 \\ 4z + 5w = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 4w = 10 \\ 2y + 5w = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 3z = 10 \\ 2y + 4z = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 4w = 10 \\ x + 4w = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3z = 10 \\ x + 4z = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

これらを解くと順に、

$$(x, y, z, w) = (0, 0, -2, 4), (0, -\frac{2}{3}, 0, \frac{8}{3}), \\ (0, -2, 4, 0), (\frac{2}{11}, 0, 0, \frac{26}{11}), \\ (\frac{4}{9}, 0, \frac{26}{9}, 0), (\frac{8}{5}, \frac{26}{5}, 0, 0)$$

※今回の問題の各成分は正の数より、

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{10}{3}, 0, 0, 0\right), (0, 6, 0, 0), \\ (0, 0, 3, 0), (0, 0, 0, \frac{12}{5}), \left(\frac{2}{11}, 0, 0, \frac{26}{11}\right), \\ \left(\frac{4}{9}, 0, \frac{26}{9}, 0\right), \left(\frac{8}{5}, \frac{26}{5}, 0, 0\right)$$

候補1にある共有点を除くと、

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{2}{11}, 0, 0, \frac{26}{11}\right), \\ \left(\frac{4}{9}, 0, \frac{26}{9}, 0\right) \left(\frac{8}{5}, \frac{26}{5}, 0, 0\right) \dots (\text{候補 2})$$

(iii) 1つの文字に0を代入したとき

x=0のとき

$$(x, y, z, w) = (0, 0, 3, 0), (0, 6, 0, 0), \\ (0, 0, 0, \frac{12}{5})$$

y=0のとき

$$(x, y, z, w) = (0, 0, 0, \frac{12}{5}), \left(\frac{10}{3}, 0, 0, 0\right),$$

$$(0, 0, 3, 0), \left(\frac{2}{11}, 0, 0, \frac{26}{11}\right), \left(\frac{4}{9}, 0, \frac{26}{9}, 0\right)$$

z=0のとき

$$(x, y, z, w) = (0, 0, 0, \frac{12}{5}), \left(\frac{10}{3}, 0, 0, 0\right), \\ (0, 0, 6, 0), \left(\frac{2}{11}, 0, 0, \frac{26}{11}\right), \left(\frac{8}{5}, \frac{26}{5}, 0, 0\right)$$

w=0のとき

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{10}{3}, 0, 0, 0\right), (0, 6, 0, 0), \\ (0, 0, 3, 0), \left(\frac{8}{5}, \frac{26}{5}, 0, 0\right), \left(\frac{4}{9}, 0, \frac{26}{9}, 0\right)$$

これらの共有点はすべて(候補1)、(候補2)にある。

$k=2x+y+3z+4w$  に代入する。

$$\left(\frac{10}{3}, 0, 0, 0\right) \text{ 代入 } k = \frac{20}{3}$$

$$(0, 6, 0, 0) \text{ 代入 } k = 6$$

$$(0, 0, 3, 0) \text{ 代入 } k = 9$$

$$(0, 0, 0, \frac{12}{5}) \text{ 代入 } k = \frac{48}{5} = 9.6$$

$$\left(\frac{2}{11}, 0, 0, \frac{26}{11}\right) \text{ 代入 } k = \frac{108}{11} = 9.8\dots$$

$$\left(\frac{4}{9}, 0, \frac{26}{9}, 0\right) \text{ 代入 } k = \frac{86}{9} = 9.5\dots$$

$$\left(\frac{8}{5}, \frac{26}{5}, 0, 0\right) \text{ 代入 } k = \frac{42}{5} = 8.4$$

よって、 $\left(\frac{2}{11}, 0, 0, \frac{26}{11}\right)$  のとき

最大値  $9.8\dots$  となる。

## 7. 考察・分かったこと

### ① 条件式と変数について

原料を1つ増やした場合、原料の式が増えるが、変数はx、yのみであるため、2次元のままであった。製品を増やした場合、その製品の数だけ変数は増えるため、製品が3つのときは3次元、製品が4つのときは4次元となった。

### ② 3次元における最大値の求め方について

・2つの平面とxy平面、yz平面、zx平面を求め、xyz平面にグラフを描く。

・各共有点を求め、価格の式に代入し、最大値を求めることができる。また、法線ベクトルを考えることでも、最大となる点を求めることができる。

③ 3次元における係数の変化による最大値の求め方

・各座標同士の係数の比を使って最大となる共有点を求める。ただし、座標軸上にない最大値については、内積を使う必要がある。

④ 4次元における最大値の求め方

・②と同じように各共有点を求める。各変数に0を代入していき、共有点を求める。そして、価格の式に代入し、最大値を求める。ただし、負の数になる座標は問題上使えないことに注意する。

## 8. 展望

これまででは、次元を増やし、3次元において効率的に最大値を求めるため、最大値の求め方を追求してきた。今後は、その最大値の求め方が4次元でも応用できるか研究を進めていきたい。

## 9. 謝辞

本論文の作成にあたり、協力してくださった数学の先生方に感謝の意を表します。

## 10. 参考文献・引用文献

数研出版改訂版高等学校数学Ⅱ、B

結果③について

〈(1)の元となったデータ〉

x	y	z	A	B	C	D	E
0	1	0	×	×	×	×	○
0.5	1	0	×	×	×	○	○
1	1	0	×	×	×	○	×
2	1	0	×	×	×	○	×
3	1	0	×	×	○	○	×
4	1	0	×	×	○	×	×
5	1	0	×	×	○	×	×

〈(4)の元となったデータ〉

x	y	z	A	B	C	D	E
1	1	0	×	×	×	○	×
1	1	1	×	×	×	○	×
1	1	1.6	×	○	×	○	×
1	1	2	×	○	×	×	×
1	1	3	○	○	×	×	×
1	1	4	○	×	×	×	×
1	1	5	○	×	×	×	×
1	1	15	○	×	×	×	×

〈(2)の元となったデータ〉

x	y	z	A	B	C	D	E
1	3	0	×	×	×	×	○
1	3	1	×	×	×	×	○
1	3	2	×	×	×	×	○
1	3	3	×	×	×	×	○
1	3	4	×	×	×	×	○
1	3	4.5	○	×	×	×	○
1	3	5	○	×	×	×	×
1	3	15	○	×	×	×	×

〈(3)の元となったデータ〉

x	y	z	A	B	C	D	E
3	1	0	×	×	○	○	×
3	1	1	×	×	○	○	×
3	1	2	×	○	○	○	×
3	1	3	×	○	×	×	×
3	1	4	×	○	×	×	×
3	1	5	×	○	×	×	×
3	1	6	×	○	×	×	×
3	1	7	×	○	×	×	×
3	1	8	×	○	×	×	×
3	1	9	○	○	×	×	×
3	1	10	○	×	×	×	×
3	1	15	○	×	×	×	×