

# ブラックジャックにおける統計学の利用

3638 與合 皇介 3534 山内 脩平 3535 山口 耀生 3604 伊藤 直斗

## 要旨

統計学を利用して求めたブラックジャックにおける全ての場合の確率を用いて、親(対戦相手)の見せ札と自分の手札の合計値から勝つための最善手を導出した。ブラックジャックの通常のルールを用いると確率導出が複雑になると考え、Aを1としてのみ扱うなどの簡易ルールを設定して、確率を求めた。その結果、簡易ルールにおけるブラックジャックの最善手が導出できた。

### 1. 目的

- ・ 数値実験によって求めたブラックジャックにおけるプレイヤーの勝率を場合分けによって求めた勝率と比較して正しいことを証明する。
- ・ 数値実験によって求めた確率を用いて、最善手を求める。

### 2. ブラックジャックのルール

ジョーカーを除いた52枚のトランプを使用するゲーム

- ・ プレイヤーは、カードの合計値が21を超えないようにカードを追加し、親は、カードの合計値が17を超えるまでカードを引き続ける。(親とは、相手プレイヤーのこと)
- ・ プレイヤーは、カードを追加した時、22を超えた場合バーストとってその時点でプレイヤーの負けとなる。
- ・ 親もまたプレイヤーと同様にバーストとなったら親の負け、すなわちプレイヤーの勝ちとなる。
- ・ Aは1または11として、J・Q・Kは10として扱う。(Aはプレイヤーが1か11どちらかにするか選択できる。)

### 3. ゲームの進行について

- ・ まずプレイヤーと親には、山札から2枚のカードが配られる。(この時プレイヤーは、配られたカードを表向きにして場に出し、親は、1番最初に配られたカードを表向きに、次に配られたカード

を裏向きにして場に出す。)

- ・ プレイヤーは、カードの合計値を21に近づけるためにカードを追加するヒット、配られたカードで勝負をするスタンド、勝負を降りるサレンダーの3つの行動を選択できる。
- ・ 全プレイヤーが、スタンドまたはヒットしたら親は自身のカードの合計値が17以上になるまでカードを引き続ける。
- ・ その後プレイヤーと親が、バーストしていない場合は、両プレイヤーのカードの合計値を比べ、高いほうが勝ちとなる。

### 4. 仮説 I

統計によって求めた勝率は場合分けによって求めた勝率と少ない誤差で一致する。

### 5. 使用した道具・ソフト

- ・ パーソナルコンピューター
- ・ Excel2016

### 6. 実験 I

- ・ 確率を導出する利便性のため、ブラックジャックの簡易ルールを設定する。
- ・ 試行回数10回、100回、1000回、10000回の検証を10回ずつ行い標準偏差を求め、バラつきが少なく効率的な試行回数を探る。
- ・ 探った試行回数で勝率を求める。(確率導出においてそれぞれExcelを用いる。)

※計算式は論文 01 - 6 ページに記載

・場合分けによる勝率と統計による勝率を比較する。なお、比較するのが目的であり、場合分けによる確率導出は大変時間がかかるため、親に最初に配られたカードの値が 7 から 10 しか求められなかった。

### 7. 簡易ルール

- ・A は常に 1 として扱う。
- ・サレンダー(勝負を降りること)は禁止にする。
- ・カードが、配られる確率は常に 4/52 すなわち 1/13 とする。(これは、実際ゲームをする時に、使われるトランプは A から K まで 13 枚が 4 種類で 1 セットとすると 13 セット使用するため確率を近似してよいと考えた。)
- ・プレイヤー対親の 1 対 1 で行う。
- ・引き分けは勝ちに含めないこととする。

### 8. 結果 I

表 1 試行回数毎の算出にかかる時間

試行回数	時間
10回	4秒
100回	37秒
1000回	6分20秒
10000回	1時間7分34秒

表 2 試行回数毎の標準偏差

試行回数	10回	100回	1000回	10000回
検証結果	0.7000	0.3400	0.3440	0.3520
	0.2000	0.4200	0.3460	0.3574
	0.6000	0.3500	0.3700	0.3461
	0.3000	0.3300	0.3840	0.3504
	0.4000	0.4300	0.3650	0.3637
	0.2000	0.4500	0.3700	0.3593
	0.4000	0.2700	0.3290	0.3691
	0.2000	0.3700	0.3530	0.3529
	0.5000	0.3600	0.3420	0.3498
	0.5000	0.4000	0.3550	0.3161
平均	0.4000	0.3720	0.3558	0.3517
範囲	0.5000	0.1800	0.0550	0.0530
標準偏差	0.1673	0.0513	0.0156	0.0136

表 3 場合分けによって求めた勝率

	親	7	8	9	10
プレイヤー					
12		0.352	0.328	0.299	0.268
13		0.330	0.307	0.280	0.250
14		0.309	0.287	0.261	0.233
15		0.287	0.267	0.242	0.215
16		0.265	0.246	0.224	0.198
17		0.244	0.226	0.205	0.180
18		0.193	0.195	0.176	0.162
19		0.135	0.136	0.137	0.126
20		0.071	0.071	0.071	0.063

表 4 統計によって求めた勝率

	親	7	8	9	10
プレイヤー					
12		0.362	0.333	0.309	0.272
13		0.321	0.322	0.290	0.260
14		0.293	0.274	0.270	0.248
15		0.279	0.273	0.233	0.235
16		0.267	0.235	0.243	0.206
17		0.230	0.213	0.203	0.172
18		0.163	0.205	0.169	0.165
19		0.154	0.148	0.143	0.106
20		0.062	0.061	0.074	0.069

表5 場合分けによる勝率と統計による勝率の差

	親	7	8	9	10
プレイヤー					
12		0.01	0.005	0.01	0.004
13		-0.009	0.015	0.01	0.01
14		-0.016	-0.013	0.009	0.015
15		-0.008	0.006	-0.009	0.02
16		0.002	-0.011	0.019	0.008
17		-0.014	-0.013	-0.002	-0.008
18		-0.03	0.01	-0.007	0.003
19		0.019	0.012	0.006	-0.02
20		-0.009	-0.01	0.003	0.006

- ・表1と表2より、標準偏差が小さく効率的な試行回数は1000回だと考えた。
- ・試行回数1000回の時、標準偏差が約0.015だったため誤差を±0.015に設定した。
- ・表4より、ほとんどの場合が誤差以内であり誤差を超えたものもあるが、それは許容できる範囲だと考えた。
- ・よって、統計によって求めた勝率を利用しても問題ないと結論付けた。

### 9. 実験II

- ・実験Iで統計によってプレイヤーの勝率が求められることが分かったので、統計を用いているような種類の確率を求め、ブラックジャックにおける最善手を明らかにしようとする。(ここでの最善手とは、プレイヤーが、カードを引く時に、ヒットするか、スタンドするか、サレンダーにするべきかどうか、最善の選択をするものとする。)
- ・実験Iで用いた簡易ルールを簡易ルール改として変更し、最善手を求める。

### 10. 簡易ルール改

- ・サレンダーをありとする。
- ・それ以外のルールは7.簡易ルールを参照。

### 11. 結果II

- ・初めに、プレイヤーがカードをスタンドする時のプレイヤーの勝率とあいこになる確率を求め

る。…①

- ・次に、プレイヤーがヒットする時のプレイヤーの勝率とあいこになる確率を求める。…②
- ・①と②の結果を利用して、最善手を求める。…③

① プレイヤーがスタンドする時のプレイヤーの勝率とあいこになる確率

表6 プレイヤーの勝率

親	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
プレイヤー										
12	0.283	0.387	0.399	0.414	0.438	0.437	0.277	0.267	0.24	0.237
13	0.331	0.375	0.374	0.395	0.422	0.449	0.273	0.271	0.23	0.247
14	0.293	0.293	0.38	0.404	0.413	0.448	0.27	0.261	0.246	0.223
15	0.298	0.374	0.394	0.401	0.434	0.451	0.263	0.291	0.25	0.242
16	0.317	0.364	0.371	0.44	0.442	0.443	0.277	0.275	0.231	0.221
17	0.302	0.388	0.397	0.418	0.416	0.431	0.286	0.283	0.23	0.244
18	0.433	0.516	0.527	0.533	0.58	0.577	0.654	0.417	0.386	0.361
19	0.59	0.66	0.649	0.679	0.676	0.674	0.753	0.775	0.502	0.447
20	0.722	0.759	0.767	0.777	0.775	0.802	0.854	0.873	0.858	0.581

表7 プレイヤーのあいこになる確率

親	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
プレイヤー										
17	0.135	0.138	0.132	0.126	0.141	0.129	0.38	0.139	0.123	0.114
18	0.141	0.136	0.134	0.133	0.13	0.112	0.12	0.4	0.13	0.112
19	0.124	0.12	0.116	0.136	0.101	0.104	0.098	0.069	0.358	0.131
20	0.12	0.113	0.135	0.122	0.109	0.105	0.08	0.08	0.071	0.32

- ・プレイヤーの最初に配られたカードの値に、16以下がないのは、親のカードの値が17以上になるまで引き続けるからである。

② プレイヤーがヒットする時のプレイヤーの勝率とあいこになる確率

表8 プレイヤーの勝率

親	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
プレイヤー										
12	0.311	0.369	0.371	0.357	0.378	0.429	0.362	0.333	0.309	0.272
13	0.294	0.341	0.342	0.356	0.362	0.379	0.321	0.322	0.290	0.260
14	0.267	0.314	0.322	0.306	0.323	0.320	0.293	0.274	0.270	0.248
15	0.250	0.265	0.275	0.294	0.274	0.285	0.279	0.273	0.233	0.235
16	0.207	0.238	0.244	0.249	0.241	0.266	0.267	0.235	0.243	0.206
17	0.196	0.225	0.214	0.208	0.202	0.220	0.230	0.213	0.203	0.172
18	0.178	0.201	0.173	0.189	0.174	0.168	0.163	0.205	0.169	0.165
19	0.120	0.138	0.123	0.128	0.124	0.135	0.154	0.148	0.143	0.106
20	0.067	0.058	0.078	0.073	0.061	0.082	0.062	0.061	0.074	0.069

表9 プレイヤーのあいこになる確率

	親	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
プレイヤー											
12		0.054	0.052	0.045	0.047	0.055	0.054	0.07	0.059	0.065	0.052
13		0.058	0.05	0.046	0.052	0.042	0.042	0.049	0.05	0.053	0.066
14		0.068	0.052	0.048	0.044	0.055	0.056	0.06	0.068	0.063	0.067
15		0.057	0.054	0.049	0.04	0.049	0.05	0.05	0.052	0.064	0.054
16		0.059	0.043	0.041	0.049	0.048	0.037	0.054	0.051	0.061	0.069
17		0.049	0.039	0.038	0.029	0.04	0.028	0.025	0.045	0.044	0.046
18		0.035	0.03	0.025	0.016	0.019	0.015	0.017	0.016	0.029	0.034
19		0.026	0.018	0.021	0.016	0.014	0.008	0.009	0.01	0.01	0.025
20		0.013	0.009	0.012	0.008	0.008	0.009	0.009	0.008	0.005	0.005

③ 表6から表9より最善手を求める。

- ・始めに、プレイヤーがヒットすべきか、スタンドすべきかについてまとめる。
  - ・このまとめ方において、期待値を利用する。
- ブラックジャックはカジノゲームの1つで賭け事なのでお金が使われます。
- ・その配当は、プレイヤーが勝ったときは賭け金(勝負をする上で使用する金)の2倍、プレイヤーがあいこのときは賭け金そのまま、サレンダーしたときは、賭け金の半分が返され、負けたときは、賭け金は全額没収されます。
  - ・今回は、賭け金を1000と設定する。

表10 プレイヤーがカードをスタンドする時の期待値

	親	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
プレイヤー											
12		566	774	798	828	876	874	554	534	480	474
13		662	750	748	790	844	898	546	542	460	494
14		586	586	760	808	826	896	540	522	492	446
15		596	748	788	802	868	902	526	582	500	484
16		634	728	742	880	884	886	554	550	462	442
17		739	914	926	962	973	991	952	705	583	602
18		1007	1168	1188	1199	1290	1266	1428	1234	902	834
19		1304	1440	1414	1494	1453	1452	1604	1619	1362	1025
20		1564	1631	1669	1676	1659	1709	1788	1826	1787	1482

表11 プレイヤーがヒットする時の期待値

	親	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
プレイヤー											
12		676	790	787	761	811	912	794	725	683	596
13		646	732	730	764	766	800	691	694	633	586
14		602	680	692	656	701	696	646	616	603	563
15		557	584	599	628	597	620	608	598	530	524
16		473	519	529	547	530	569	588	521	547	481
17		441	489	466	445	444	468	485	471	450	390
18		391	432	371	394	367	351	343	426	367	364
19		266	294	267	272	262	278	317	304	296	237
20		147	125	168	154	130	173	133	130	153	143

表10と表11を比べると、

表12 カードをヒットするべきかスタンドするべきか

	親	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
プレイヤー											
12		○	○	△	△	△	○	○	○	○	○
13		△	△	△	△	△	△	○	○	○	○
14		○	○	△	△	△	△	○	○	○	○
15		△	△	△	△	△	△	○	○	○	○
16		△	△	△	△	△	△	○	△	○	○
17		△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
18		△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
19		△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
20		△	△	△	△	△	△	△	△	△	△

この表で、○はヒット、△はスタンドを表す。

- ・次に、表12の最善手の期待値とサレンダーしたときの期待値を比べる。
- ・③のときと同様に賭け金を1000と設定する。
- ・サレンダーしたときは、賭け金の半分が返されるので、期待値は常に500となる。

表13 表12の最善手の期待値

	親	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
プレイヤー											
12		676	790	787	828	876	912	794	725	683	596
13		646	732	730	764	844	898	691	714	633	586
14		602	680	760	808	826	896	646	616	603	563
15		596	748	788	802	868	902	608	598	530	524
16		634	586	742	880	884	886	588	531	547	481
17		739	914	926	962	973	991	952	705	583	602
18		1007	1168	1188	1199	1290	1266	1428	1234	902	834
19		1304	1440	1414	1494	1453	1452	1604	1619	1362	1025
20		1564	1631	1669	1676	1659	1709	1788	1826	1787	1482

この表とサレンダーの期待値500と比較して、

表 14 サレンダーするべきか否か

	親	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
プレイヤー											
12		◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
13		◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
14		◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
15		◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
16		◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	×
17		◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
18		◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
19		◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
20		◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎

この表で、◎はヒットまたはスタンド、×はサレンダーを表す。

表 12 と表 14 からブラックジャックにおける最善手は、

表 15 ブラックジャックにおける最善手

	親	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
プレイヤー											
12		○	○	△	△	△	○	○	○	○	○
13		△	△	△	△	△	△	○	○	○	○
14		○	○	△	△	△	△	○	○	○	○
15		△	△	△	△	△	△	○	○	○	○
16		△	△	△	△	△	△	○	△	○	×
17		△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
18		△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
19		△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
20		△	△	△	△	△	△	△	△	△	△

この表で、○はヒット、△はスタンド、×はサレンダーを表す。

最後に、この最善手を利用して、実際にゲームを行ったときの確率を求めてみる。

・ルールは、11. 簡易ルール改を利用する。しかし使用するカードは、52 枚 1 セットのカードを引くため確率は常に 4/52 にはならない。

・試行回数は、10 回 100 回 200 回 500 回 1000 回の 5 つ

表 16 試行回数別のブラックジャックの勝負の結果

試行回数	勝ち	あいこ	負け	サレンダー
10	5	2	3	0
100	49	13	38	0
200	95	20	83	2
500	217	47	227	9
1000	408	82	477	33

また、それぞれの期待値 (賭け金を 1000 に設定) は、

表 17 表 16 の期待値

試行回数	期待値
10	1200
100	1110
200	1055
500	971
1000	914.5

最善手における期待値の平均は、959.8 である。

## 1 2. 考察 II

・ブラックジャックの最善手は、表 15 となり、数値実験によって求められることが、分かった。

・実際に簡易ルール改を用いて、ゲームをしたとき、カードを引く確率が統計で求めたときと少し異なるため、期待値にずれが生じたと考えられる。

・親の手札が 7~10 においては、この最善手は妥当性があると思えるが、1 と 2 のときはプレイヤーの手札が 13 のときなど妥当性があるといえない場合があった。あいこも期待値に含めているため、検証回数 1000 回ではあいこの確率は正確ではないと考え、その影響で表 15 の様になったと考えた。

## 1 3. 今後の展望

・簡易ルール改での最善手は統計で、求められた。しかしまだ本来のルールと異なる点があるため、A を 1 と 11 で扱うなどのルールを変えて、実際のゲームに近づけていく。

・ベイズ統計学を利用して、試行回数を減らして、確率導出にかかる時間の短縮をはかる。

・検証回数を増やし、より正確な最善手を制作していく。

## 1 4. 謝辞

研究を手伝って下さった人々に感謝します。

## 1 5. 参考文献

講演会「見方で変わる数学の学び」

確率導出において使用した Excel の計算式

```
Sub g()  
Dim j As Long  
For j = 1 To Cells(5, 14)  
    Randomize '乱数系列初期化  
    Cells(j, 7).Value = Int(13 * Rnd + 1) '1  
    ~13 で乱数生成  
Next j  
End Sub  
Sub q()  
Dim j As Long  
For j = 1 To Cells(5, 14)  
    Randomize '乱数系列初期化  
    Cells(j, 17).Value = Int(13 * Rnd + 1)  
'1~13 で乱数生成  
Next j  
End Sub  
Sub t()  
Dim j As Long  
For j = 1 To Cells(5, 14)  
    Randomize '乱数系列初期化  
    Cells(j, 20).Value = Int(13 * Rnd + 1)  
'1~13 で乱数生成  
Next j  
End Sub  
Sub w()  
Dim j As Long  
For j = 1 To Cells(5, 14)  
    Randomize '乱数系列初期化  
    Cells(j, 23).Value = Int(13 * Rnd + 1)  
'1~13 で乱数生成  
Next j  
End Sub  
Sub z()  
Dim j As Long  
For j = 1 To Cells(5, 14)  
    Randomize '乱数系列初期化  
    Cells(j, 26).Value = Int(13 * Rnd + 1)  
'1~13 で乱数生成
```

```
Next j  
End Sub  
Sub ac()  
Dim j As Long  
For j = 1 To Cells(5, 14)  
    Randomize '乱数系列初期化  
    Cells(j, 29).Value = Int(13 * Rnd + 1)  
'1~13 で乱数生成  
Next j  
End Sub  
Sub af()  
Dim j As Long  
For j = 1 To Cells(5, 14)  
    Randomize '乱数系列初期化  
    Cells(j, 32).Value = Int(13 * Rnd + 1)  
'1~13 で乱数生成  
Next j  
End Sub  
Sub ai()  
Dim j As Long  
For j = 1 To Cells(5, 14)  
    Randomize '乱数系列初期化  
    Cells(j, 35).Value = Int(13 * Rnd + 1)  
'1~13 で乱数生成  
Next j  
End Sub  
Sub am()  
Dim j As Long  
For j = 1 To Cells(5, 14)  
    Randomize '乱数系列初期化  
    Cells(j, 39).Value = Int(13 * Rnd + 1)  
'1~13 で乱数生成  
Next j  
End Sub
```