21413

ラグビーボールの体積

2630　林貴弘　　2628　中嶋萌夏　　2523　長瀬歩

要旨

微積分の基礎知識・基礎計算を学び、それを利用してラグビーボールの体積を求めることを試みた。ラグビーボールを側面からみた状態を楕円とみて長さを測定し、得られた値から座標平面上に楕円を設定し、回転体の体積を求めた。その後ラグビーボールを水槽に沈めることによって実際の体積を測定し、計算によって求められた値と比較した。その結果、それらの間ではほとんど誤差がないことから、微積分によって体積を求めることが可能であることが分かった。

本論

1．目的

ラグビーボールの体積を求める。

2．使用した器具・装置など

・ラグビーボール
・ポリバケツ
・水槽
・ビーカー
・トレー

3．研究・実験の手順

（ア）数学Ⅱ、数学Ⅲの教科書を用いて、一人ずつ他のメンバーの前で授業する。その内容について議論し理解を深める。

（イ）アメフトのボールを側面から見た状態を楕円とみて長さを測定し、得られた値から座標平面上に楕円を設定し、回転体の体積を求める。

（ウ）アメフトのボールを水槽一杯の水に沈め、あふれ出た水の体積をビーカーで測る。

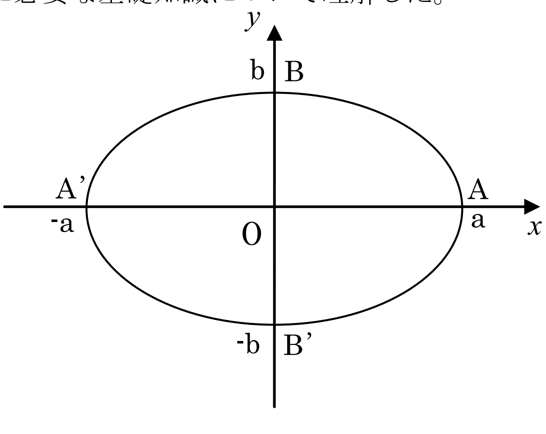
（エ）（ウ）の結果があまりにも計算結果がかけ離れていたため、正式なラグビーボールに変えて（イ）（ウ）を再度行った。

4．結果

（ア）まず、数学Ⅱ，数学Ⅲの教科書より体積を求めるのに必要な基礎知識について理解した。

数学Ⅲ　楕円の方程式

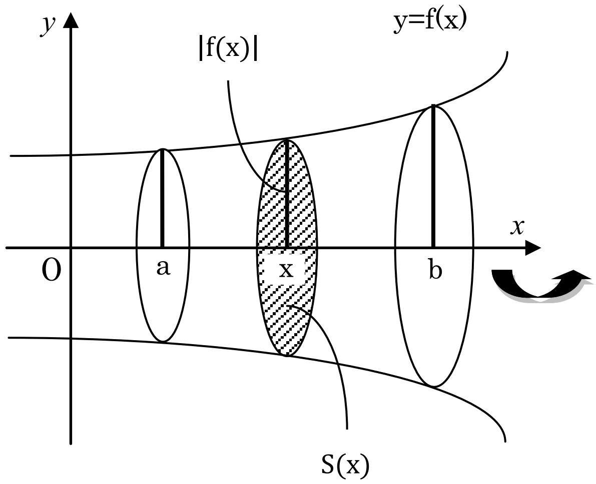
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$



平面上で、2 定点 F、F’からの距離の和が一定である点の軌跡を楕円といい、この 2 点 F、F’を楕円の焦点という。2 点 F、F’を焦点とする楕円において、線分 FF’の中点を楕円の中心という。線分 AA’を長軸、線分 BB’を短軸という。焦点は長軸上にある。楕円は、長軸、短軸、中心に関して対称である。楕円$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$について、頂点は 4 点(a, 0)、(−a, 0)、(0, b)、(0, −b)で、中心は原点 O である。

数学Ⅲ　x 軸の周りの回転体の体積の公式より

$$\boxed{V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx}$$



右図のように、曲線 y=f(x)と x 軸および 2 直線 x=a、x=b で囲まれた部分が、x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V について考える。

点(x, 0)を通り、x 軸に垂直な平面でこの回転体を切ると、断面は半径が|f(x)|の円である。

その断面積を S(x)とすると

$$\boxed{S(x)=\pi|f(x)|^2=\pi\{f(x)\}^2}$$

であるから、上の公式が成り立つ。

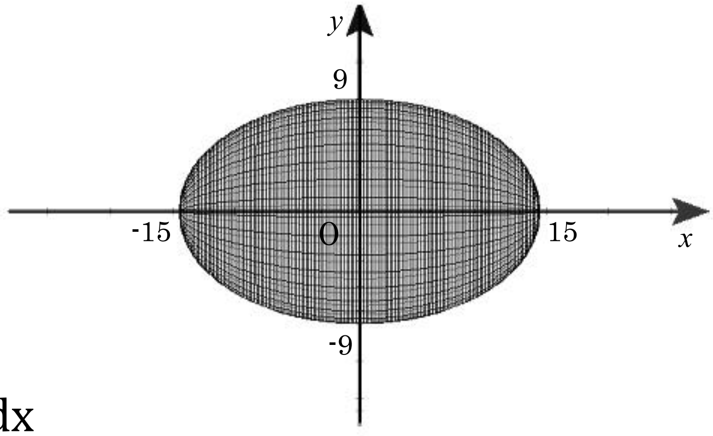
(イ)次に、アメフトのボールを側面からみた状態を楕円とみて、楕円の方程式を利用した。

楕円の方程式より、長軸の長さを 2a = 30 すなわち a = 15、短軸の長さを 2b = 18 すなわち b =9 として計算した。

$$\frac{x^2}{15^2}+\frac{y^2}{9^2}=1$$

$$y^2=9^2-\frac{9^2}{15^2}x^2$$

$$=-\frac{9^2}{15^2}x^2+9^2$$



x 軸の周りの回転体の体積の公式より

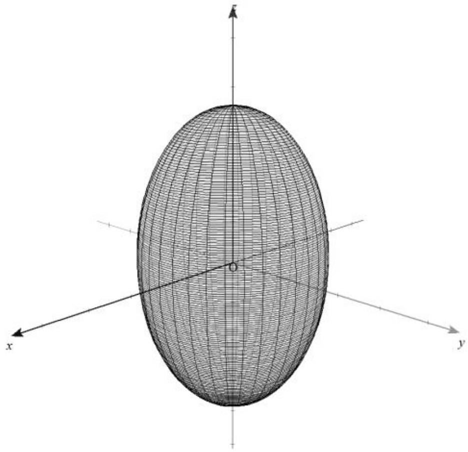
$$V=\pi\int_{-15}^{15}\left(-\frac{9^2}{15^2}x^2+9^2\right)dx$$

$$=2\pi\int_0^{15}\left(-\frac{9^2}{15^2}x^2+9^2\right)dx$$

$$=2\pi\left[-\frac{9^2}{3\times15^2}x^3+9^2x\right]_0^{15}$$

$$=1620\pi$$

$$=5086.8[\mathrm{cm}^3]$$



(ウ)アメフトのボールを水槽いっぱいに沈めた結果、

1 回目：4069cm^3

2 回目：3650cm^3

3 回目：3652cm^3となり、平均は3790cm^3であった。

計算して求めた値と実測による値とでは、1296.8cm^3もの差が生まれた。

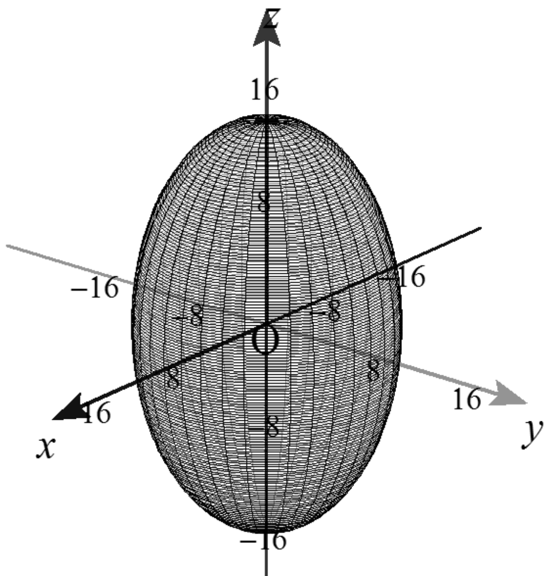
(エ)(ウ)の結果があまりにも計算結果とかけ離れていたため、ボールを正式なラグビーボールに変えて、(イ)、(ウ)を再度行った。

楕円の方程式より、長軸の長さを 2a = 29 すなわち a = 14.5、短軸の長さを 2b = 18 すなわち b =9 として計算した。

$$\frac{x^2}{14.5^2}+\frac{y^2}{9^2}=1$$

$$y^2=9^2-\frac{9^2}{14.5^2}x^2$$

$$=-\frac{9^2}{14.5^2}x^2+9^2$$



x 軸の周りの回転体の体積の公式より

$$V=\pi\int_{-14.5}^{14.5}\left(-\frac{9^2}{14.5^2}x^2+9^2\right)dx$$

$$=2\pi\int_0^{14.5}\left(-\frac{9^2}{14.5^2}x^2+9^2\right)dx$$

$$=2\pi\left[-\frac{9^2}{3\times14.5^2}x^3+9^2x\right]_0^{14.5}$$

$$=1566\pi$$

$$=4917.24[\mathrm{cm}^3]$$

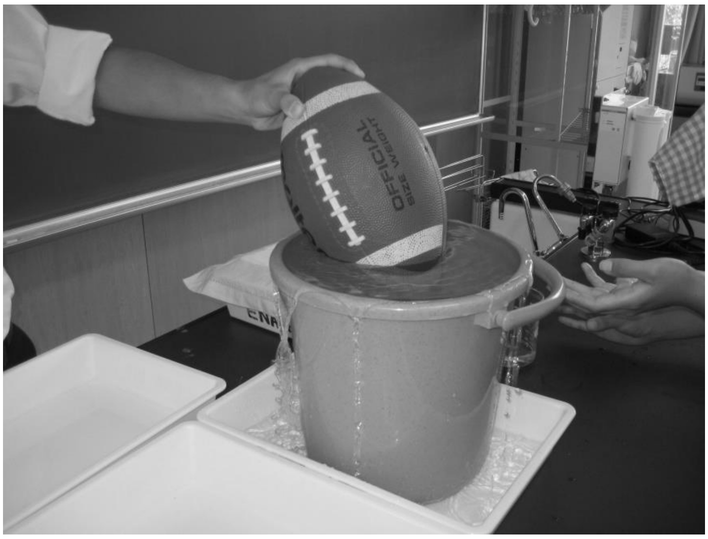
ラグビーボールを水槽いっぱいに沈めた結果、

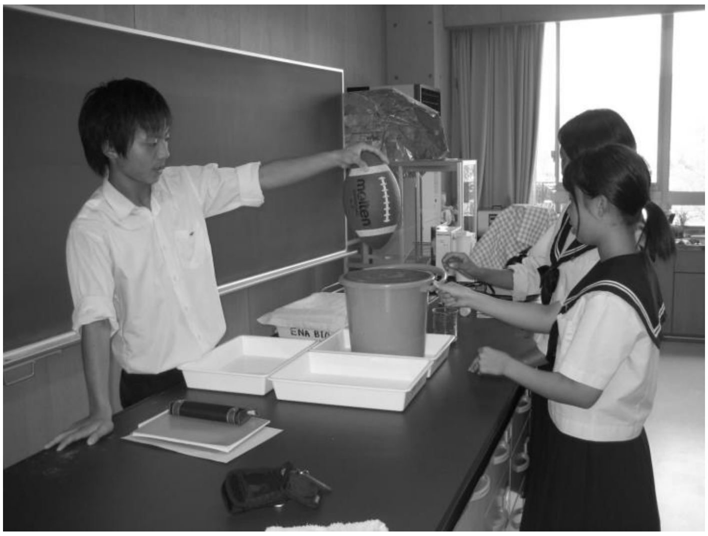
1回目：4925cm^3

2回目：5075cm^3

3回目：4860cm^{3}となり、平均は4953.3cm^{3}であった。

計算して求めた値と実測による値とでは、36.06cm^{3}の差が生まれた。





5．結果に対する考察・わかったこと

・ 計算による体積と実測した体積の差は

アメフトのボール　1296.8 ㎤

ラグビーボール　　36.06 ㎤　　　であった。

・立体の体積は、平面図形の回転体とみて求めることができる。また、ラグビーボールのような複雑な立体の場合でも、似たような図形で表して回転させることによって体積を求められることが分かった。

・実験の結果アメフトのボールのほうが計算して求めた値と実測した値の差が大きかったのは、二つのボールに形状の違いがあるからだと考えた。同じ楕円でも、定義された楕円と実際のボールを楕円と見た形では、「曲がり具合」に違いがある。ラグビーボールはアメフトのボールよりも定義された楕円に形が近いため、差が少ないのではと考えた。そのため、この「曲がり具合」について詳しく調べようとしたところ、「曲率」という単語にたどりついた。この「曲率」によってより正確な体積を求めることができるかもしれない。今後はこの「曲率」を学ぶとともに、二つのボールの正確な体積を求められるように研究していく。

6．参考文献・引用文献

・「高等学校　数学Ⅲ」数研出版

・「高等学校　数学Ⅱ」数研出版