

# 四色問題

3507 伊藤 健太郎

## 要旨

四色問題とは、四色あればどんな地図でも隣り合う国々が違う色になるように塗り分けることができるのか、というものである。四色問題は何年も数学者たちを悩ませてきたわけだが、今回、この問題の証明がなぜ困難であるのかを知るために、四色問題についての本を読み、いろいろな証明法とその証明はなぜ不完全であるのかを調べた。そこで、いくつかの証明法とその証明の問題点、そして四色問題の難しさと奥深さ、面白さがわかった。

今回は数ある証明の中からいくつかの間違った証明を挙げる。

(1) まずは四色問題と同じような次の問題を挙げて考える。

### 『5人の王子の問題』

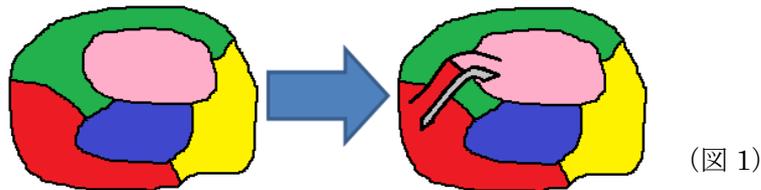
むかしむかし、インドに大きな国がありました。この国の王様が亡くなるときに、5人の王子に言いました。「私が死んだら、王国は5人で分けなさい。」

ただし、どの国の領土も、他の4人の領土と境界線（点ではいけない）を共有するように分けなければならない。

さて、王国はどのように分ければよいでしょう？

この問題を解こうとしても、他の4つの領土と境界線（点ではいけない）を共有するような5つの国を見つけるのは不可能である。

ただし、地図を3次元で考えると5つの領土のうちの2つを結ぶ橋をかければ解決する。(図1)



(図1)

しかし、この答えはごまかしである。今回は3次元の場合は無視して平面の地図について扱う。

ここで、この5人の王子の問題が解けたとすると、

「相互に隣り合う5つの領土を含む地図があるならば、四色定理は間違っている」ことになる。

では逆に、「相互に隣り合う5つの領土を含む地図がないならば、四色定理は正しい」ことになるのか？ということを考える。

上記のことを考えるにあたり、次の例を挙げて証明する。

P : 0 で終わる自然数

Q : 5 で割り切れる自然数      という P、Q を設定する。

ここで、

「P が真ならば、Q は真である」「Q が偽ならば、P は偽である」「Q が真ならば、P は真である」  
「P が偽ならば、Q は偽である」という 4 つの命題を考えると、

(i) 「P が真ならば、Q は真である」

0 で終わる自然数は 5 で割り切れるので、命題は真

(ii) 「Q が偽ならば、P は偽である」

5 で割り切れない自然数は 0 で終わらないので、命題は真

(iii) 「Q が真ならば、P は真である」

5 で割り切れる自然数は 0 で終わるわけではないので、命題は偽

(反例 ; 5, 15, 25... は 5 で割り切れるが 0 で終わらない)

(iv) 「P が偽ならば、Q は偽である」

0 で終わらない自然数は 5 で割り切れないわけではないので、命題は偽

(反例 ; 5, 15, 25... は 0 で終わらないが 5 で割り切れる)      となる。

上の例をふまえて、

P : 相互に隣り合う 5 つの領土を含む地図がある

Q : 四色定理は間違っている      という P、Q を設定する。

ここで、上の例と同様に

「P が真ならば、Q は真である」「Q が偽ならば、P は偽である」は成り立つが、  
「Q が真ならば、P は真である」「P が偽ならば、Q は偽である」は成り立たないことが分かる。

つまり、ここでは (iv) に対応する「相互に隣り合う 5 つの領土を含む地図がないならば、四色定理は正しい」という命題は間違っていることが分かる。

よって、相互に隣り合う 5 つの領土を含む地図がないならば、四色定理は正しいとはいえないので、この証明は正しいとはいえない。

## (2) 数学的帰納法を用いた証明

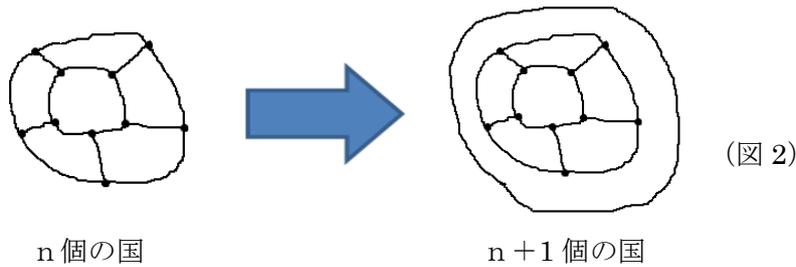
任意の数字  $n$  について、

$n$  個の国からなるあらゆる地図が四色で塗り分けられるとすると、

$n+1$  個の国からなるあらゆる地図が四色で塗り分けられるのかを証明する。

( $n=1$  のときは国が 1 つであるので 1 色で塗れるために省略する)

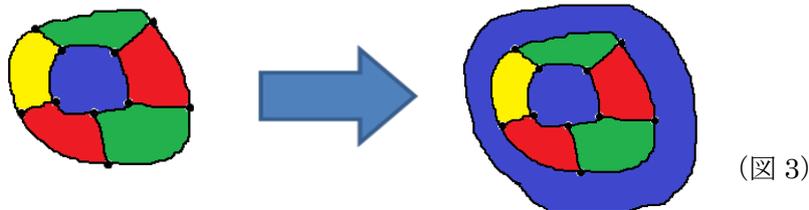
$n$  個に分けられた地図の周りに  $n + 1$  番目を追加するのは次のような作業である。(図 2)



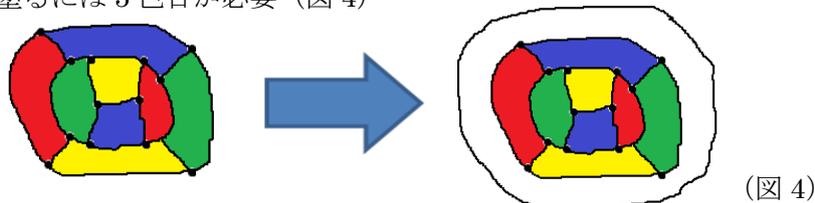
ここで、次の 2 つのパターンを考える必要がある。

- (i)  $n$  個の国からなる地図の端が 3 色で塗られている
- (ii)  $n$  個の国からなる地図の端が 4 色で塗られている

- (i)  $n$  個の国からなる地図の端が 3 色で塗られているとき  
 $n$  個に分けられた地図の周りに  $n + 1$  番目を追加すると、地図の端に使われていない 4 色目 (青) で  $n + 1$  番目の国を塗るので塗り分けを変えずに周りに国を追加可能。  
 つまり地図全体が 4 色で塗れる。(図 3)

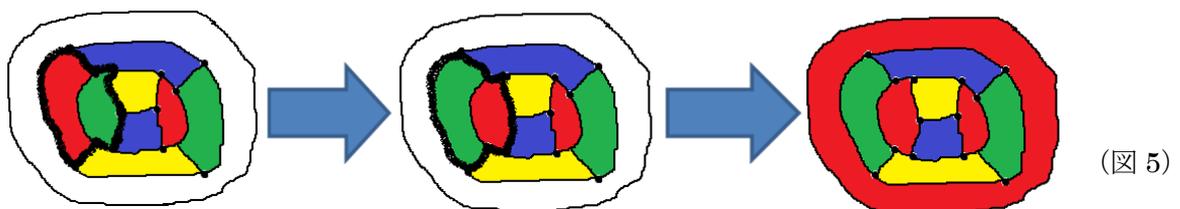


- (ii)  $n$  個の国からなる地図の端が 4 色で塗られているとき  
 $n$  個に分けられた地図の周りに  $n + 1$  番目を追加すると、周りが 4 色で塗られているため  $n + 1$  番目の国を塗るには 5 色目が必要 (図 4)



しかし、図 4 の地図は 5 色ないと塗れないわけではなく、色を入れ替えることによって 4 色で塗れる。ここでは、例として左の赤-緑部分 (黒太枠) の色を入れ替える。

すると、地図の端が黄、青、緑の 3 色になるので、地図の端に使われていない 4 色目 (赤) で  $n + 1$  番目の国を塗れる。つまり地図全体が 4 色で塗れる。(図 5)



- (i) (ii) からどちらの場合でも 4 色で塗れることが分かる。
- しかし、(i) は簡単に  $n + 1$  個目の国を地図全体が 4 色で塗れるように追加できるが、(ii) のように地図が複雑になるにつれて大幅な色を入れ替えが必要になってくる。
- 塗り分け拡張の一般的方法を見つけるのは困難であるために証明としてはいい方法とはいえない。

### (3) 最小反例を用いた証明

最小反例とは、四色定理が間違っていて、4色では塗り分けられない地図が存在するとした時の、5色以上が必要な国の数の最小値のことである。

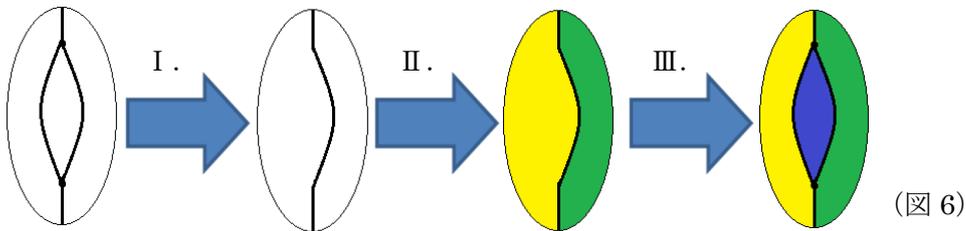
最小反例は4色で塗り分けられないが、それより少ない国からなる地図はどれも4色で塗り分けられるということが分かる。

つまり、最小反例が存在しなければどんな地図も4色で塗り分けることができるといえる。

(i) 2辺国を含む最小反例があると仮定して、次の3つの作業を行う。

(2辺国=2つの国に囲まれ、そのそれぞれの国と1本の境界線を共有する国)

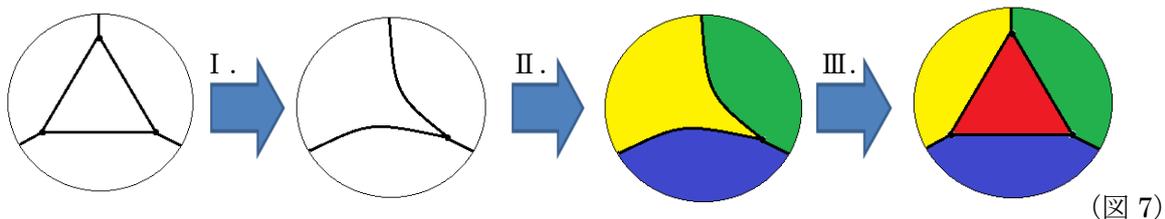
- I. 2辺国から境界線を1本とり、最小反例より少ない数の国からなる新しい地図を作る
- II. Iで作った新しい地図は4色で塗れるので、色を塗る
- III. 2辺国を復元し、2辺国に色をわりふる (図6)



(図6)

最小反例が4色以下で塗れてしまうので「2辺国を含む最小反例がある」という仮定に矛盾する。このことから、最小反例は2辺国を含まないことが分かる。

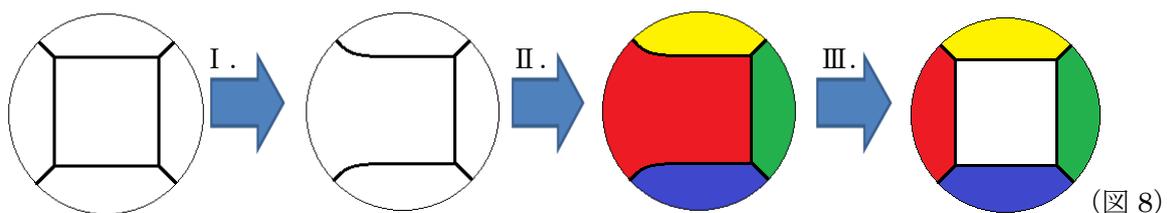
(ii) 3辺国を含む最小反例があると仮定して、同様に3つの作業を行う。(図7)



(図7)

最小反例が4色以下で塗れてしまうので「3辺国を含む最小反例がある」という仮定に矛盾する。このことから、最小反例は3辺国を含まないことが分かる。

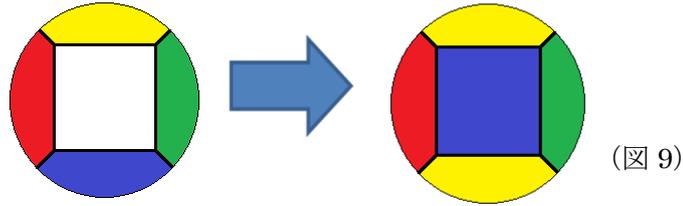
(iii) 4辺国を含む最小反例があると仮定して、同様に3つの作業を行う。(図8)



(図8)

ここで、塗り分けた後に4辺国を復元すると図8のように4辺国の4つの隣国を塗り分けるために4色すべてが使われている可能性がある。その場合、4辺国は5色目が必要となり、最小反例が4色で塗り分けられないことになる。しかし、塗り替えれば4色で塗れる(図9)ので、(i)(ii)のように証明

を進めることができなくなる。よって、この方法も適切とはいえない。



#### (4) ケンプ鎖の論証を用いた証明

ケンプ鎖の論証とは、中心の国を取り囲む国々の色の中から隣り合っていない2色を選び、その2色の国について考えていくものである。その2色の国と繋がった国々を鎖のように見て証明を進める。

- ・2辺国を含む地図の場合、2辺国の周りには国が2個あるので2辺国自体は周りとは違う色(3色目)で塗れる。つまり4色以下で塗ることができる。よって、最小反例は2辺国を含まない。
- ・3辺国を含む地図の場合も、3辺国の周りには国が3個あるので3辺国自体は周りとは違う色(4色目)で塗れる。つまり4色以下で塗ることができる。よって、最小反例は3辺国を含まない。
- ・4辺国を含む地図の場合は、4辺国の周りの4つの国が既に4色で塗られているときには4辺国自体は周りとは違う色(5色目)で塗らなければならないことになり、地図全体は5色必要になる。しかし、4辺国の周りの国の色を入れ替えることによって、4辺国自体は4色目で塗ることができる。このことを証明する。

4辺国の周りの4つの国が既に4色で塗られているパターンは次の2つである。

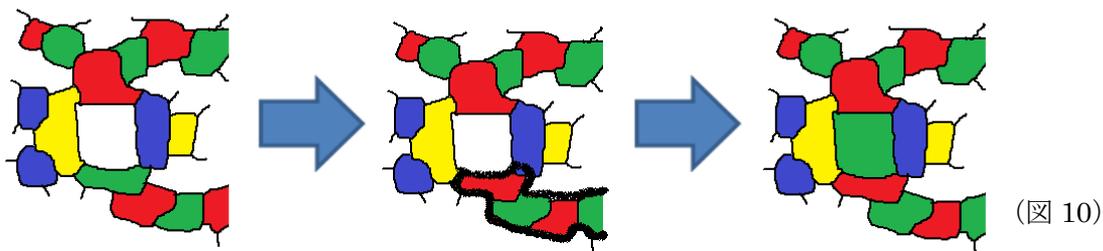
- (i) 4辺国の上下の国々が繋がっていない
- (ii) 4辺国の上下の国々が繋がっている

この2パターンを証明する。(以下、連続する国々を「鎖」と呼ぶことにする。)

##### (i) 4辺国の上下の国々が繋がっていないとき

真ん中の4辺国は赤、黄、緑、青の4色に挟まれているため、5色目が必要になってしまうので、色の入れ替えを行う。

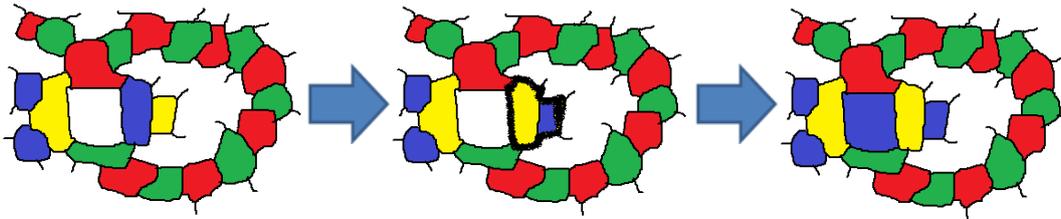
4辺国の上下の鎖は繋がっていないので、どちらかの鎖の色の組み合わせを入れ替えても地図全体に影響を及ぼすことはない。ここでは、4辺国の下の鎖の色の組み合わせを入れ替える。すると、4辺国の周りの国が3色(赤、黄、青)で塗られることになるので、4辺国自体は4色目(緑)で塗ることができる。(図 10)



(ii) 4 辺国の上下の国々が繋がっているとき

真ん中の 4 辺国は赤、黄、緑、青の 4 色に挟まれているため、5 色目が必要になってしまうので、色の入れ替えを行う。

4 辺国の上下の鎖は繋がっているので、4 辺国の左右にある青-黄部分に注目して見ると、赤-緑の鎖が邪魔をしているために左右の青-黄部分は繋がっていないことが分かる。(i) 同様どちらかの鎖の色の組み合わせを入れ替えても地図全体に影響を及ぼすことはない。ここでは、4 辺国の右の鎖の色の組み合わせを入れ替える。すると、4 辺国の周りの国が 3 色 (赤、黄、緑) で塗られることになるので、4 辺国自体は 4 色目 (青) で塗ることができる。(図 11)



(図 11)

(i) (ii) より、4 辺国の地図の塗り分けが完成し、4 辺国を含む地図は 4 色で塗ることができると分かる。よって、最小反例は 4 辺国を含まない。

・ 5 辺国を含む地図の場合も、5 辺国の周りの 5 つの国が既に 4 色で塗られているときには 5 辺国自体は周りとは違う色 (5 色目) で塗らなければならないことになり、地図全体は 5 色必要になる。しかし、5 辺国の周りの国の色を入れ替えることによって、5 辺国自体は 4 色目で塗ることができる。このことを証明する。

5 辺国の周りの 5 つの国が既に 4 色で塗られているパターンは次の 3 つである。

(iii) 5 辺国の上下の国々が繋がっていない

(iv) 5 辺国の左側の国々のみが繋がっている (右側も同様)

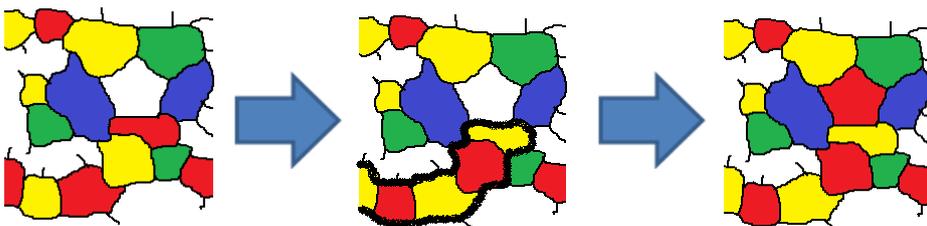
(v) 5 辺国の左右の国々が繋がっている

この 3 パターンを証明する。

(iii) 5 辺国の上下の国々が繋がっていないとき

真ん中の 5 辺国は赤、黄、緑、青の 4 色に挟まれているため、5 色目が必要になってしまうので、色の入れ替えを行う。

5 辺国の上下の鎖は繋がっていないので、どちらかの鎖の色の組み合わせを入れ替えても地図全体に影響を及ぼすことはない。ここでは、5 辺国の下の鎖の色の組み合わせを入れ替える。すると、5 辺国の周りの国が 3 色 (黄、緑、青) で塗られることになるので、5 辺国自体は 4 色目 (赤) で塗ることができる。(図 12)

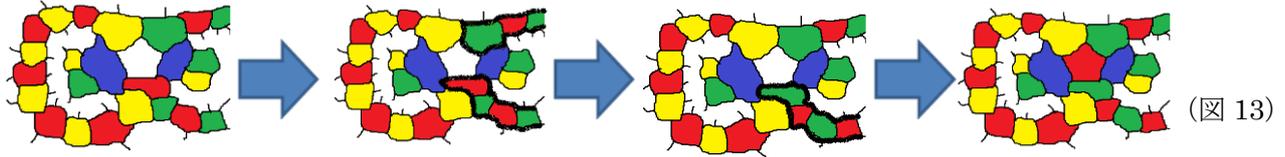


(図 12)

(iv) 5 辺国の左側の国々のみが繋がっているとき (右側も同様)

真ん中の 5 辺国は赤、黄、緑、青の 4 色に挟まれているため、5 色目が必要になってしまうので、色の入れ替えを行う。

5 辺国の左側の鎖は繋がっているが、5 辺国の右側にある赤-緑部分の鎖は繋がっていない。どちらかの鎖の色の組み合わせを入れ替えても地図全体に影響を及ぼすことはないので、ここでは、5 辺国の右下の鎖の色の組み合わせを入れ替える。すると、5 辺国の周りの国が 3 色 (黄、緑、青) で塗られることになるので、5 辺国自体は 4 色目 (赤) で塗ることができる。(図 13)

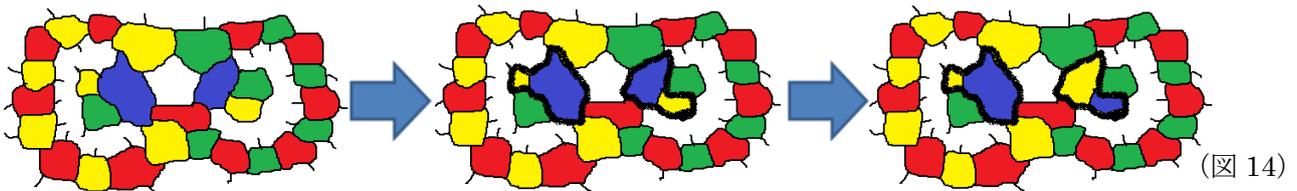


(図 13)

(v) 5 辺国の左右の国々が繋がっているとき

真ん中の 5 辺国は赤、黄、緑、青の 4 色に挟まれているため、5 色目が必要になってしまうので、色の入れ替えを行う。

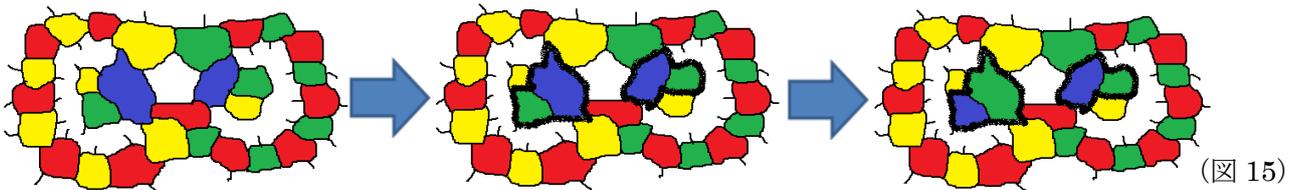
I. 右側の赤-緑部分の鎖が邪魔をしているので、5 辺国の左右にある黄-青部分の鎖は繋がっていないことが分かる。どちらかの鎖の色の組み合わせを入れ替えても地図全体に影響を及ぼすことはないので、ここでは、5 辺国の右側の鎖の色の組み合わせを入れ替える。(図 14)



(図 14)

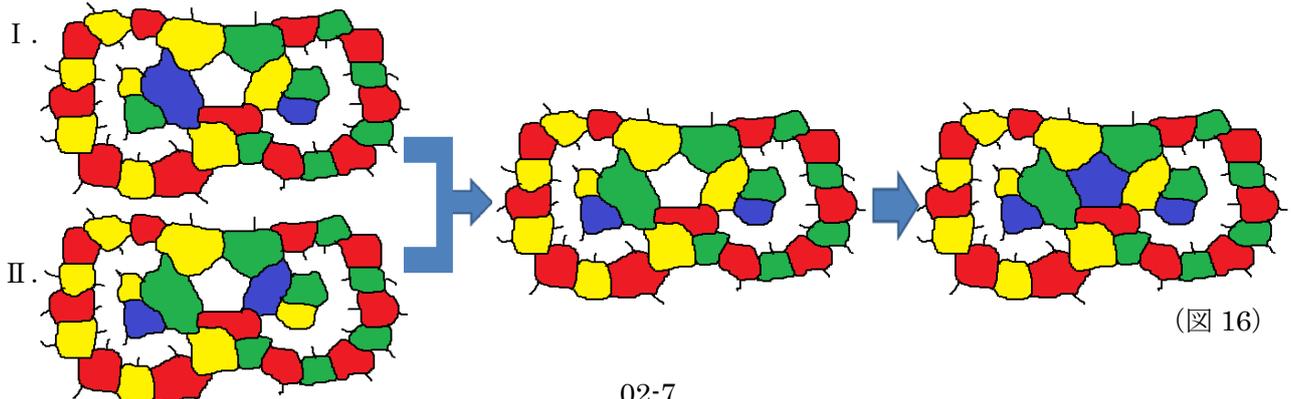
しかし、この作業だけでは 5 辺国の周りの国はまだ 4 色のままであるので、II の作業を同時に行う。

II. 左側の赤-黄部分の鎖が邪魔をしているので、5 辺国の左右にある緑-青部分の鎖は繋がっていないことが分かる。どちらかの鎖の色の組み合わせを入れ替えても地図全体に影響を及ぼすことはないので、ここでは、5 辺国の左側の鎖の色の組み合わせを入れ替える。(図 15)



(図 15)

I. II. の作業を同時に行うと、5 辺国の周りの国が 3 色 (赤、黄、緑) で塗られることになるので、5 辺国自体は 4 色目 (青) で塗ることができる。(図 16)



(図 16)

(iii) (iv) (v) より、5 辺国の地図の塗り分けが完成し、5 辺国を含む地図は 4 色で塗ることができる。よって、最小反例は 5 辺国を含まない。

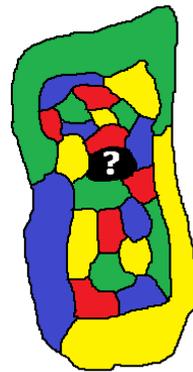
ここで、一般的に「どんな地図にも、5 個以下の隣国しか持たない国が少なくとも 1 つ含まれている」と知られている。このことと、「最小反例は 5 辺国を含まない」といえたことから、最小反例が存在しないことが分かる。ゆえに四色問題は証明できたことになる（実際は間違っている）。

上の、5 辺国の両側を取り囲む国々の色を 2 通りの方法で同時に入れ替えることで 5 辺国を塗るための色が余るようにするという方法は、一見すると証明として適しているように思える。しかし、2 通りの方法での色の入れ替えは、単独では問題ないが、同時に行うことは許されない。その理由を、次の地図を使って説明する。

(4') ケンプ鎖の論証の反例

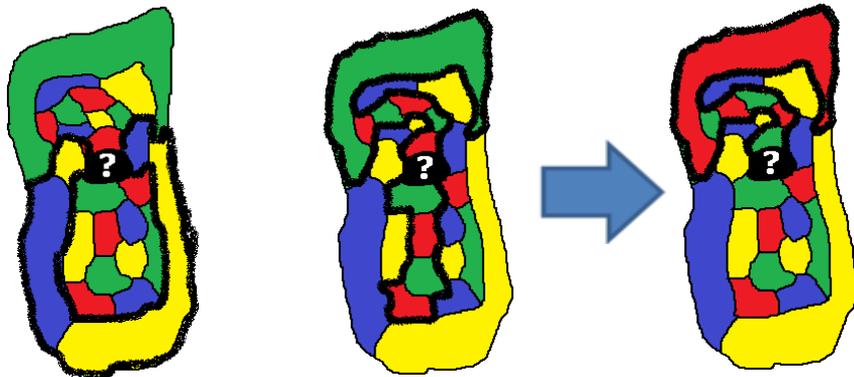
ケンプ鎖の反例として、図 17 を挙げる。

「？」の国は周りの国が 4 色で塗られているために、塗り分けるには 5 色目が必要となる。ケンプ鎖の証明のように 5 辺国の両側を取り囲む国々の色を 2 通りの方法で同時に入れ替えることで 5 辺国を塗るための色が余るようにする方法を行い、「？」の国を塗ることを考えていく。



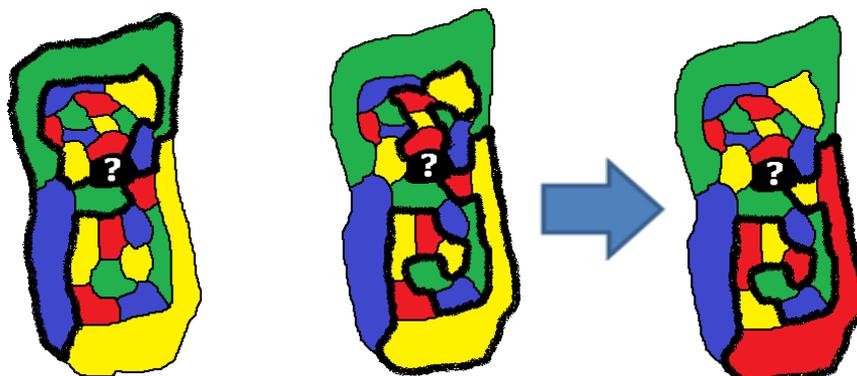
(図 17)

I. 下側の黄-青部分の鎖が邪魔をしているので、5 辺国の上下にある赤-緑部分の鎖は繋がっていないことが分かる。どちらかの鎖の色の組み合わせを入れ替えても地図全体に影響を及ぼすことはないので、ここでは、5 辺国の上側の鎖の色の組み合わせを入れ替える。(図 18)



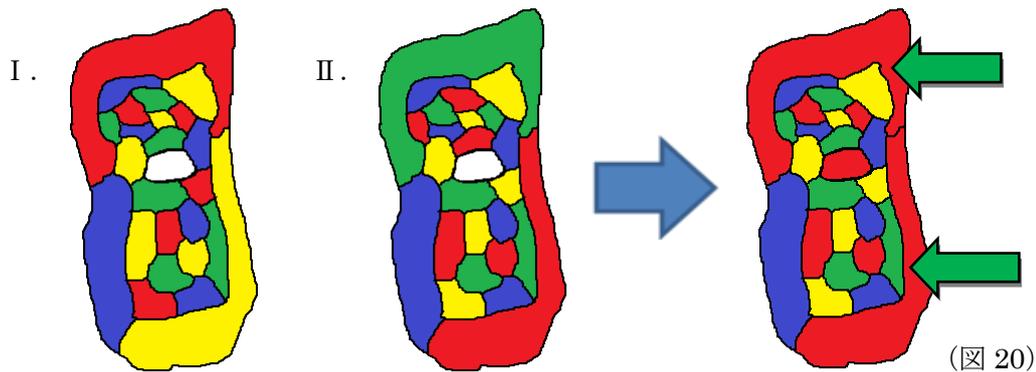
(図 18)

II. 上側の緑-青部分の鎖が邪魔をしているので、5 辺国の上下にある赤-黄部分の鎖は繋がっていないことが分かる。どちらかの鎖の色の組み合わせを入れ替えても地図全体に影響を及ぼすことはないので、ここでは、5 辺国の下側の鎖の色の組み合わせを入れ替える。(図 19)



(図 19)

I. II. の作業を同時に行うと、5 辺国の周りの国が 3 色（黄、緑、青）で塗られることになるので、5 辺国自体は 4 色目（赤）で塗ることができる。（図 20）

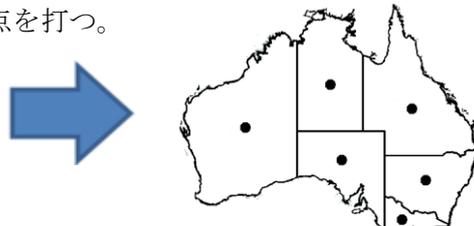


ここで、図 20 では 5 辺国は 4 色目で塗れたが、緑矢印の国が同じ色（赤）で隣り合ってしまう。つまり、5 辺国の両側を取り囲む国々の色を 2 通りの方法で同時に入れ替えることで 5 辺国を塗るための色が余るようにする方法（キャンプ鎖の論証）は間違っていたといえる。

#### （5）双対グラフを用いた証明

双対グラフとは、地図の各地域の上に点を打ち、境界線を共有する地域に対応する点どうしを線でつないだ図のことである。このとき、線で直接結ばれた 2 点に同じ文字が割り当てられないようにすべての点にできるだけ少ない種類の文字を割り当てるにはどうすればよいかということを考える。（この考え方は四色問題と同種の問題である。）

双対グラフの作成の例をオーストラリアの地図で表す。  
まずは右図のように地図の各地域の上に点を打つ。



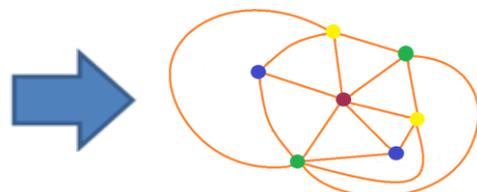
次に境界線を共有する地域に対応する点どうしを右図のように線でつなぐ。



地図を取り払うと双対グラフができる。



線で直接結ばれた 2 点に同じ色が割り当てられないようにすべての点にできるだけ少ない種類の色を割り当てると元の地図が 4 色で塗れたことになるので、四色問題と同じ結論にたどりつくことが分かる。

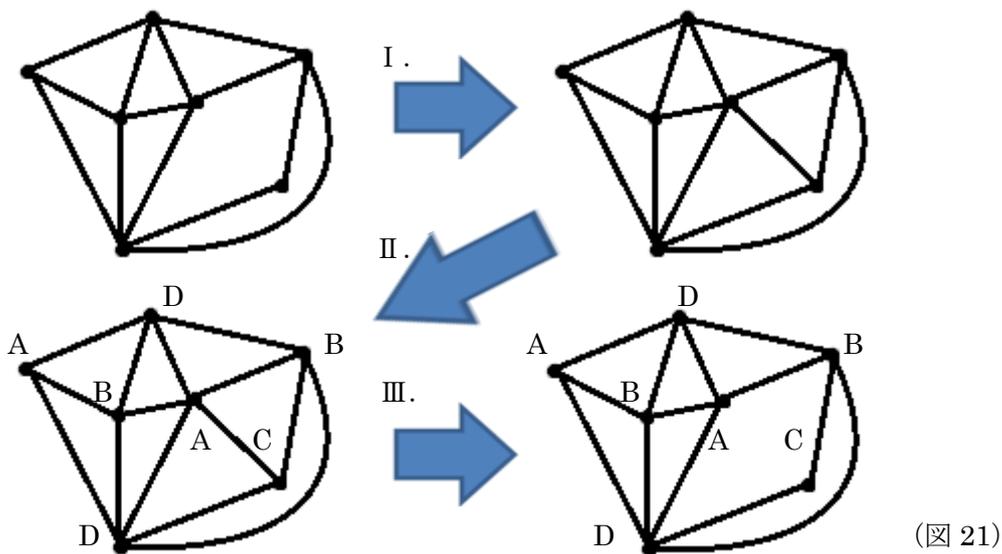


ここで、双対グラフを利用した 2 つの証明を紹介する。

(5. i) 次の 3 つの作業を行う。

- I. 双対グラフを三角形化する (線を追加して全体を三角形に分ける)
- II. それぞれの点に同じ文字が隣り合わないよう文字を割り当てる
- III. 追加した線を除去する

この 3 つの作業でもとの双対グラフの点にも 4 つの文字が割り当てられることになる。(図 21)

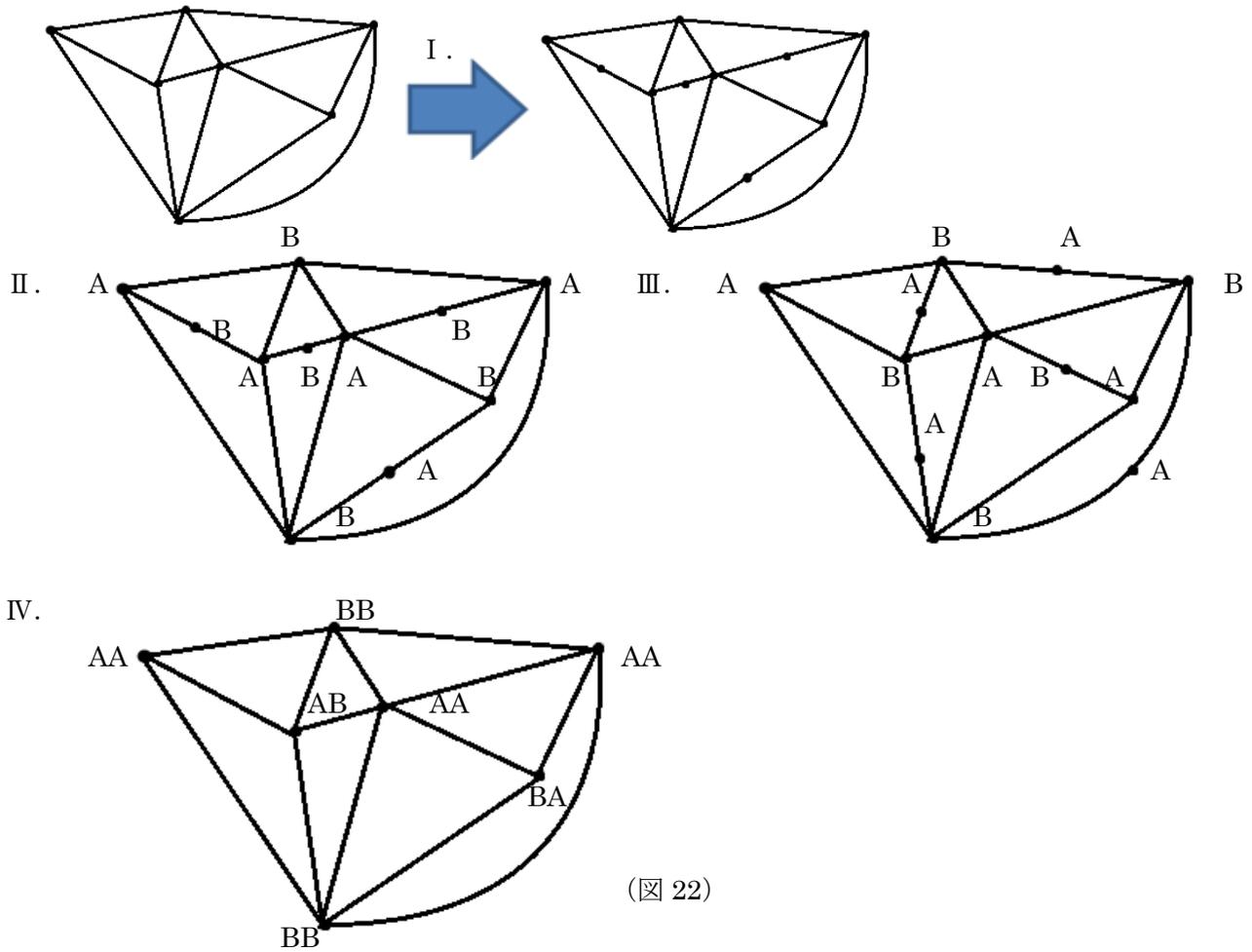


(図 21)

(5. ii) 三角形化したグラフを三角形の国の集まりであるとみて、次の作業を行う。

- I. 三角形の国々に点を追加して、辺の数が 4 本になるようにする
- II. すべての点に A、B の文字を交互に割り当てる
- III. 三角形の国々の前とは違う位置に点を追加して、すべての点に A、B の文字を交互に割り当てる
- IV. II と III の地図を重ねて、追加した点を消す

この方法により、線で結ばれた点どうしが同じ文字にならないように AA、AB、BA、BB の 4 種類の合成文字を割り当てられる。(図 22)



(5. i) (5. ii) の証明は、文字の割り当ては常に可能であるという確証が持てないために、いい方法とはいえない。

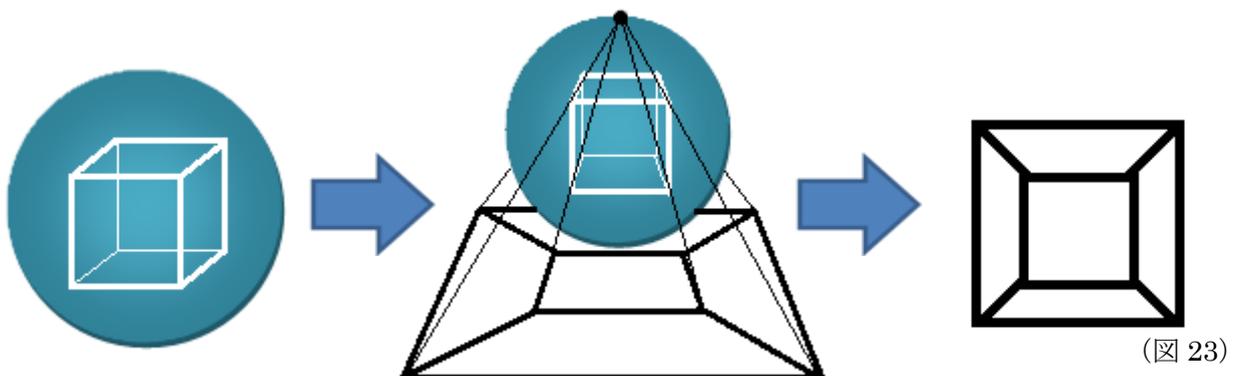
#### (6) 立体を 4 色で塗る

立方体や正四面体などの立体も 4 色以下で塗れることを示す。

まずは、立体を球で包む。

その後、球体の北極点に位置する点と立体の頂点を結ぶ線を平面上まで伸ばす。

すると立体を平面で表せるので平面上の図を塗り分けることが立体を塗り分けることに相当する。(図 23)



つまり、平面が4色で塗れば立体も4色で塗れることになるので、立体を4色で塗り分けるにはまずは平面の図を4色で塗り分けることを考えなければならないということが分かる。

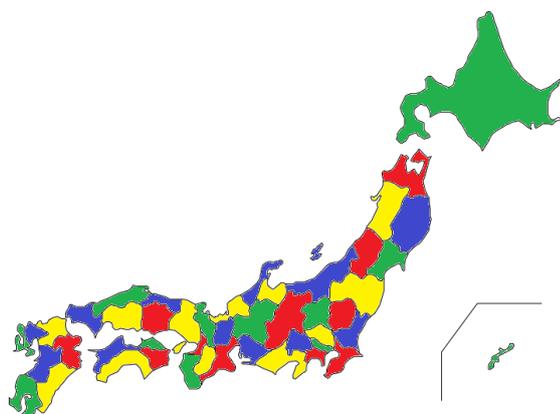
今までのさまざまな証明から、これは困難であると分かるので、立体を4色で塗ることも困難である。

#### (7) 四色問題は解けたのか

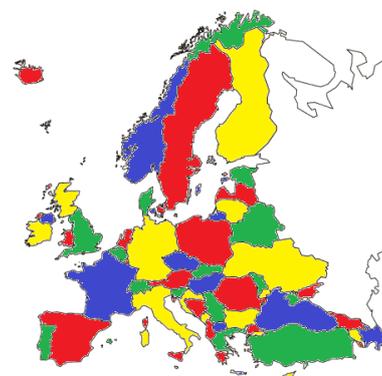
最後に、現在までの四色問題の歴史を示して終わる。

四色問題がフランシス・ガスリーによって最初に提起されたのは150年余りも昔のことである。しかし、どんな地図でも4色で塗り分けられることが確実にになったのはそれから1世紀以上にわたって人々が地図の塗り分けに挑戦し、必要な理論的手続きを開発してからのことだった。その後もなお、困難な哲学的疑問が残された。最終的に四色問題を解いたのはヴォルフガング・ハーケンとケネス・アップルで、1976年のことだった。彼らの方法はコンピュータに1000時間以上も計算させるというものであったため、この知らせは熱狂と落胆を持って迎えられたという。特に、数学者の間では、人間の手で結果を直接確認できない場合に、問題が解決されたと考えてよいのかという点をめぐって、今日もなお論争が続いているそうである。

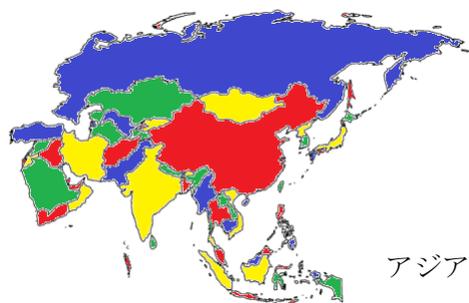
#### (8) 実際に地図を4色で塗ってみた



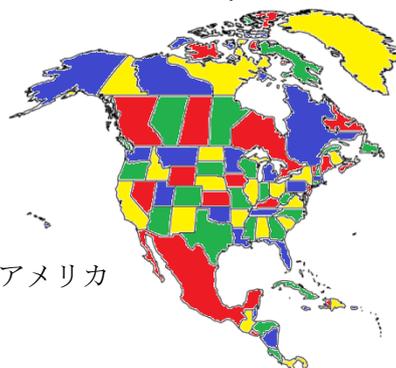
日本



ヨーロッパ



アジア



北アメリカ

#### (9) 参考文献

四色問題     ロビン・ウィルソン（茂木健一郎・訳）