21015

和算

要旨

和算(江戸時代の日本の数学)がどれだけ発展していたかを知り、知識を深め、色々な考え方を身に付ける。実際にカラス算などの問題を解いたり、関孝和と同じ方法で円周率を求めた。

1、 目的

和算という、日本ならではの数学を学ぶことを通して、現代の算数や数学とは少し違う視点で様々な数学の問題などを考え直してみる。

江戸時代の人々はどのようにして円周率を求めたのかを明らかにする。

2、使用した器具、装置

インターネットや本で調べた。

3、研究・実験の手順

カラス算や鶴亀算などの様々な問題を解き、現代の解き方と比較。

関孝和がどのように円周率を求めたのかを調べた。

4、結果

関孝和は和算が中国の模倣を超えて独自の発展を始めるにあたって、重要な役割を果たした。

また、1681 年頃に暦の作成にあたって、円周率の近似値が必要になったため、正 131072 角形を使って小数第 11 位まで算出した。

日本数学史上最高の英雄的人物とされた。

関孝和

関孝和は、直径 1 の円に内接する正2^{15}角形、2^{16}角形、2^{17}角形の周の長さs^{15},s^{16},s^{17}から

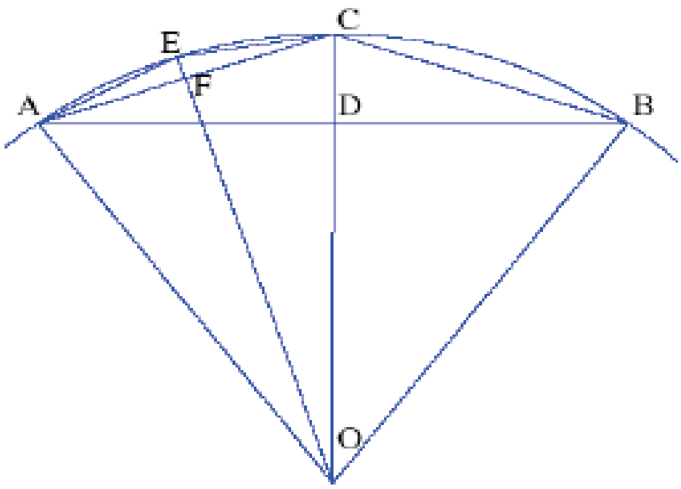
$$t_{15} = s_{16} + \frac{(s_{16} - s_{15})(s_{17} - s_{16})}{(s_{16} - s_{15}) - (s_{17} - s_{16})}$$

を計算し定周を定めた。

直径 1 の円に内接する正2^2,…2^{17}角形の勾股弦周を「環矩術」により得る。

上の式は関の後継者達からは「増約術」と呼ばれ、今日では AitkenΔ^2法と呼ばれている。

関孝和は円に内接する四角から131072角形までの勾股弦周を「勾股術」(三平方の定理)を繰り返し用いて計算している。



上図のA、B、C、EはOを中心、直径1の円周上の点とし、弦AB、弦AC、弦AEはそれぞれ円Oに内接する正2_{v-2}角形、2_{v-1}角形、2_v角形の1辺とする。円Oに内接する正2_{v-1}角形と正2_v角形の勾股弦周はそれぞれ下付きの添字で表し、
$勾_{v-1}$＝CD、$股_{v-1}$＝AD、$弦_{v-1}$＝AC、$周_{v-1}$＝$2_{v-1}弦_{v-1}$、
$勾_v$＝EF、$股_v$＝AF、$弦_v$＝AE、$周_v$＝$2_v弦_v$
により定義する(線分や曲線とそれらの長さは同じ記号で扱う。)

$勾_v=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-弦^2_{v-1}}\right)$ 、 $股_v=\frac{1}{2}弦_{v-1}$ 、$弦_v=\sqrt{勾^2_v+股^2_v}$ 、$周_v=2^v弦_v$

により計算したものと思われる。なお、$弦^2_{v-1}\left(=勾^2_{v-1}+股^2_{v-1}\right)$は正$2^{v-1}$角形において計算済みであるので各$v$において加減算3回、乗算3回、冪2回、開平2回の計算が必要。

$v=4$の時について、実際に値を出してみる。
AE、AC、AB はそれぞれ直径 1 の円に内接する正2^4角形、正2^3角形、正2^2角形の 1 辺とする。

AB$(=弦_{v-2})$は直径 1 の円に内接する正 4 角形(2^v角形)の一辺だから、AB=$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

AD=$股_{v-1}=\frac{1}{2}弦_{v-2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

CD=$勾_{v-1}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-弦_{v-2}{}^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

AC=$弦_{v-1}=\sqrt{勾_{v-1}{}^2+股_{v-1}{}^2}=\sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{16}+\frac{2}{16}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$≒0.3827

AC は直径 1 の円に内接する正 8 角形(2^3角形)の一辺なので、正 8 角形の周の長さは 0.3827×8 で

約 3.0616 となる。

15-2

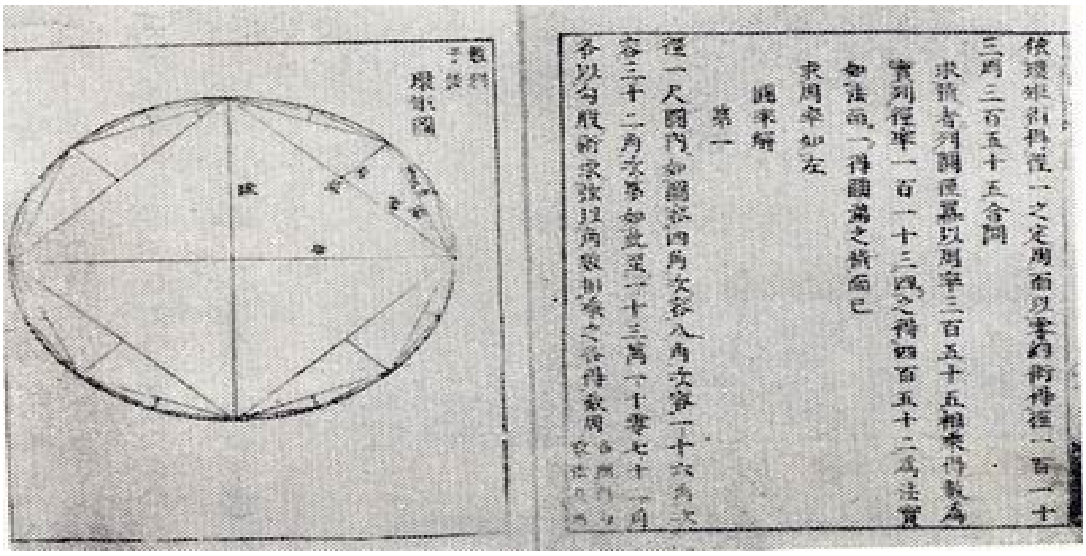
$$EF=勾_v=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-{弦_{v-1}}^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\right)\fallingdotseq 0.0381$$

$$AF=股_v=\frac{1}{2}弦_{v-1}\fallingdotseq 0.1913$$

$$AE=弦_v=\sqrt{{勾_v}^2+{股_v}^2}=\sqrt{0.0014+0.0365}=\sqrt{0.0379}\fallingdotseq 0.1947$$

AE は直径 1 の円に内接する正 16 角形(2^4角形)の一辺なので、正 16 角形の周の長さは 0.1947×16 で約 3.1152 となる。

このようにして角の数を増やして計算していくと、3.14159……に近づいていく。



関孝和の計算結果をまとめると、規則性が見てとれる。

$v=17$(内接正 131072 角形)の場合を表にまとめると下図のようになる。

勾	0,00000 00005 74486 5682 強
股	0,00002 39684 49801 5334 強
弦	0.00002 39684 49808 4182 強
周	3.14159 26532 88992 7759 弱

彼は 17 桁の円周率(直径 1 の円周の長さ)を得たにもかかわらず､｢定周｣として求めたのは 12 桁である。

これについては様々な仮説があるが、次の結論を得た。

｢定周｣とは零約術を用いて円周率の近似分数を求める際に基準とする｢円周率｣である。

環矩術により、円に内接する正2^2角形から正2^{17}角形までの勾股弦周を与えている。正2^{15},2^{16},2^{17}角形の周長から｢定周｣を求める計算式と｢定周｣を与えている。｢定周｣を用いて円周率を$355/113$まで計算し、これ以上続けても分母と分子が大きくなるので$355/113$を｢定周｣としている。

Vを 1 増やす(角数を 2 倍にする)とΔs_vが 16 分の 1 になるのを見て取り、$|t_{16}-t_{15}|$は 0.00000 00000

00000005 より小さくなるだろうと予測をしt_{15}は 17 桁前後性格と判断した。そして 3.141592653589 は確実に円周率に合っていると考え、これを定周とした。

5、 結果に対する考察、わかったこと

一年生の時のＳＳＣでもやったように、江戸時代の人、関孝和も円に内接する正多角形を使って円周率を求めようとしていた。これはまた古代の数学者と同様の考え方だった。

だから、円周率を求めるには円に内接する正多角形を使うのが一般的な方法だと思われる。

江戸時代の算数は当時とても発展していて、世界の最先端を鎖国下で走っていた時もあった。

したがって、他の地域との交流がなく、比較的狭い地域のなかでの交流であっても、発展するものは発展するのだと思われる。

円周率を求めるのは計算が煩雑だったし、考え方もよほど考え抜かなければ出てこないような発想もあったりして、やはり難しいことだった。

現代の数学であればわからない値をアルファベットの文字ですべて表記するが、関孝和は漢字で表記していたため、手間取った。

去年の SSC とはまた違った求め方で、難しかったが新鮮だった。

同じ円周率を求めるといっても、求める人に応じてやり方が微妙に異なっていたので、そこに数学の面白さを感じた。

非常に煩雑な計算が必要とされる時があったが電卓もない時代に算盤などで正確に計算してあるので、当時いかに優れた文化が存在していたのか、感服せずにはいられなかった。

確かに、円周率を当時の方法で求めていくのは難しかったが、しかし、これまでに習ったことを応用に応用を重ねていけば、円周率を当時の方法で求めていくことは決してできないわけでもないかもしれないというように感じた。

ＳＳＣで学んだ事や調べたことをこれから生かしていけるといいと思った。

６、参考文献

インターネット

http://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%96%A2%E5%AD%9D%E5%92%8C

http://www.cis.twcu.ac.jp/~osada/rims2008.pdf

本

江戸の数学　和算

江戸の算術指南