全統マーク 2018 第2回 数学②

1 [1] $0 \leqq \theta < 2\pi$

$f(\theta) = \sin^2\theta + \sin\theta$

$g(\theta) = 2\cos 2\theta + 3\cos\theta - 2$

(1) $\sin^2\theta + \sin\theta = 0$

$\sin\theta(\sin\theta + 1) = 0$

$\therefore \sin\theta = 0, -1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $\theta = 0, \pi, \frac{3}{2}\pi$ 」

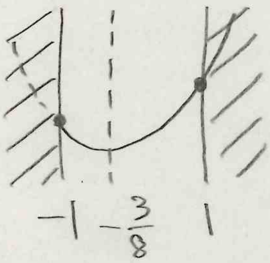
(2) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$g(\theta) = 4\cos^2\theta + 3\cos\theta - 4$

$\cos\theta = t$ とすると $-1 \leqq t \leqq 1$

$g(\theta) = 4t^2 + 3t - 4$

$= 4\left(t + \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{16} - 4$



$g(\theta)$ が最小となるのは $t = -\frac{3}{8}$ のとき

つまり $\cos\theta = -\frac{3}{8}$ 」

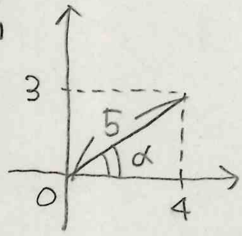
(3) $h(\theta) = 4(\sin^2\theta + \sin\theta)$

$+ 4\cos^2\theta + 3\cos\theta - 4$

$= 4\sin\theta + 3\cos\theta + 4(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 4$

$= 4\sin\theta + 3\cos\theta$ 」

$= 5\sin(\theta + \alpha)$ 」

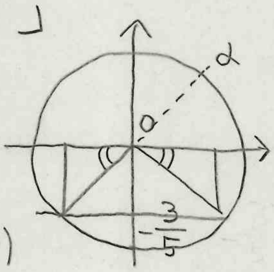


ただし、

$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \sin\alpha = \frac{3}{5}$ 」

$h(\theta) = -3$ のとき

$\sin(\theta + \alpha) = -\frac{3}{5}$



$\alpha \leqq \theta + \alpha < \alpha + 2\pi$ より

$\theta + \alpha = \pi + \alpha, 2\pi - \alpha$

$\therefore \theta = \pi, 2\pi - 2\alpha$ 」

[2] $a > 0, a \neq 1$

$f(x) = 2\log_{a^2}(x+2) + \log_a(8-x)$

真数条件より $x + 2 > 0$ かつ $8 - x > 0$

$\therefore -2 < x < 8$ 」

(1) $a = 3$ のとき

$f(-1) = 2\log_9 1 + \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$ 」

(2)

$f(x) = 2 \cdot \frac{\log_a(x+2)}{\log_a a^2} + \log_a(8-x)$

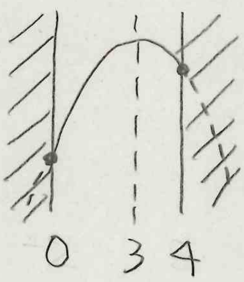
$= \log_a(x+2) + \log_a(8-x)$

$= \log_a\{(x+2)(8-x)\}$

$= \log_a(-x^2 + 6x + 16)$ 」

$g(x) = -x^2 + 6x + 16$ とおくと

$g(x) = -(x-3)^2 + 25$



$a > 1$ より

$g(x)$ が最大・最小のとき、$f(x)$ もそれぞれ最大・最小となる

$f(x)$ の最大値は

$f(3) = \log_a 25$

最小値は $f(0) = \log_a 16$ 」

(3) i) $a > 1$ のとき (2) より

$-2 < \log_a 16$ かつ $\log_a 25 < 2$

$\frac{1}{a^2} < 16$ かつ $25 < a^2$

$\frac{1}{4} < a$ かつ $5 < a$

$\therefore 5 < a$

ii) $0<a<1$ のとき (2)より $f(x)$の

最大値は $f(0)=\log_a 16$

最小値は $f(3)=\log_a 25$

$\therefore -2<\log_a 25$ かつ $\log_a 16<2$

$\frac{1}{a^2}>25$ かつ $16>a^2$

$\frac{1}{5}>a$ かつ $4>a$

$\therefore 0<a<\frac{1}{5}$

以上 i), ii) より $0<a<\frac{1}{5},\ 5<a$」

$\boxed{2}$ $a>0$

$f(x)=x^3+(1-2a)x^2+(a^2-a)x$

$g(x)=x^2+px+q$

(1) $f(a)=a^3+(1-2a)a^2+(a^2-a)a$

$=a^3+a^2-2a^3+a^3-a^2=0$」

また $f'(x)=3x^2+2(1-2a)x+a^2-a$

より $f'(a)=3a^2+2(1-2a)a+a^2-a$

$=3a^2+2a-4a^2+a^2-a$

$=a$」

(2) ℓの方程式は

$y-0=a(x-a)$ $\therefore y=ax-a^2$」

mの方程式は

$y-0=-\frac{1}{a}(x-a)$ $\therefore y=-\frac{1}{a}x+1$」

$$\begin{cases} f(a)=g(a) & \cdots\cdots ① \\ f'(a)=g'(a) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①について $a^2+pa+q=0$

$\therefore q=-a^2-pa$

$g(x)=x^2+px-a^2-pa$

$g'(x)=2x+p$

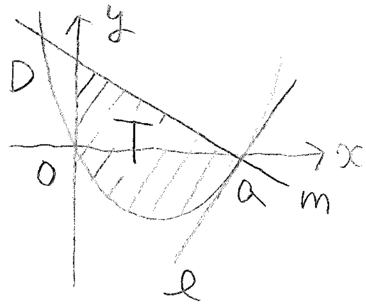
②について $a=2a+p$ $\therefore p=-a$

$q=-a^2-(-a)\cdot a=-a^2+a^2=0$」

$g(x)=x^2-ax=x(x-a)$

$B(0,-a^2)$, $A(a,0)$, $O(0,0)$

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot a=\frac{1}{2}a^3$



$T=\int_0^a\left\{-\frac{1}{a}x+1-(x^2-ax)\right\}dx$

$=\int_0^a\left\{-x^2+\left(a-\frac{1}{a}\right)x+1\right\}dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2+x\right]_0^a$

$=-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)a^2+a$

$=\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{2}a$」

$T-S=\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a^3$

$=-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a$

$h(a)=-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a$ とすると

$h'(a)=-a^2+\frac{1}{2}$

a	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$h'(a)$		$+$	0	$-$
$h(a)$		↗	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	↘

$T-S$は $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ で最大となり

最大値は $\frac{\sqrt{2}}{6}$」

3

(1) 初項 a，公差 d とすると

$$\begin{cases} a+(a+d)=8 \\ a+2d=7 \end{cases} \quad \therefore a=3,\ d=2$$

$a_n=2n+1$

$S_n=\dfrac{n}{2}(3+2n+1)=n(n+2)$

$$\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}k(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+6)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$$

(2) $T_n=\dfrac{3}{2}b_n-n+\dfrac{1}{2}$

$T_1=b_1$ より

$b_1=\dfrac{3}{2}b_1-1+\dfrac{1}{2} \quad \therefore b_1=1$

$b_{n+1}=T_{n+1}-T_n$

$$=\frac{3}{2}b_{n+1}-(n+1)+\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{2}b_n-n+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}b_{n+1}-\frac{3}{2}b_n-1$$

$\therefore b_{n+1}=3b_n+2$

$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$ と変形でき，

$b_n+1=(b_1+1)\cdot 3^{n-1}$

よって $b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$

(3) $r_1=1$

$n\geqq 2$ のとき

$b_n=3(2\cdot 3^{n-2}-1)+2$

$\therefore r_n=2$

$$\sum_{k=1}^{n}a_kr_k=3\cdot 1+\{5+7+9+\cdots+(2n+1)\}\cdot 2$$

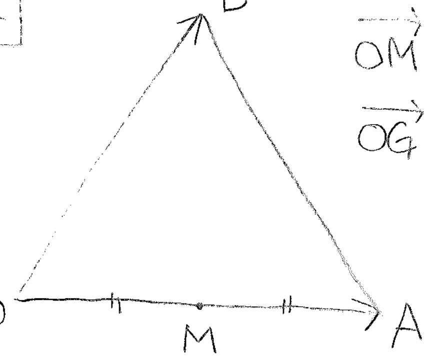
$$=\{3+5+7+9+\cdots+(2n+1)\}\cdot 2-3$$

$$=2S_n-3$$

$$=2n(n+2)-3$$

$$=2n^2+4n-3$$

4



$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{0}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

(1) $a\overrightarrow{IO}+6\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$-a\overrightarrow{OI}+6(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI})+5(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI})=\vec{0}$

$(a+11)\overrightarrow{OI}=6\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}$

$1<a<11$ より

$$\overrightarrow{OI}=\frac{6}{a+11}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{a+11}\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OG}$

$$=\frac{6}{a+11}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{a+11}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

$$=\frac{7-a}{3(a+11)}\overrightarrow{OA}+\frac{4-a}{3(a+11)}\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OA}\parallel\overrightarrow{GI}$ のとき　$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は1次独立

$$\therefore \frac{4-a}{3(a+11)}=0 \quad \therefore a=4$$

$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{GI}$ のとき　$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$$\frac{7-a}{3(a+11)}=-\frac{4-a}{3(a+11)}$$

$7-a=-4+a$

$\therefore a=\dfrac{11}{2}$

(2) $a=4$ より $AB=4$

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2$$
$$=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2$$

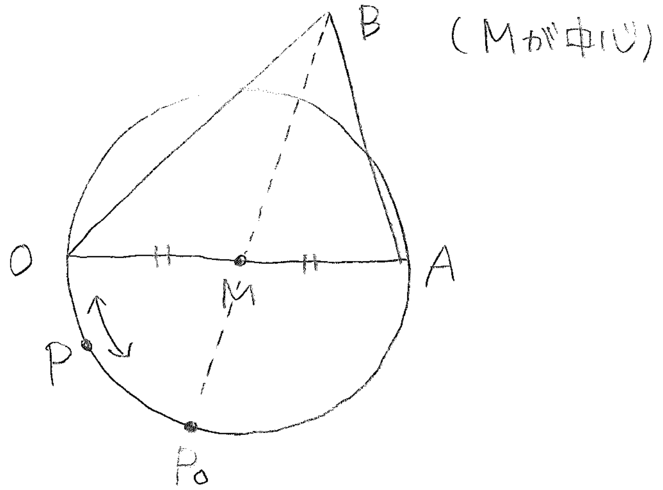
$$\therefore\ 4^2=6^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+5^2$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{36+25-16}{2}=\frac{45}{2}$$

$$|\overrightarrow{BM}|^2=|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}|^2=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|^2$$
$$=\frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$$
$$=\frac{25}{4}-\frac{45}{2}+36=\frac{25-90+144}{4}$$
$$=\frac{79}{4}$$

$|\overrightarrow{BM}|>0$ より $|\overrightarrow{BM}|=\frac{\sqrt{79}}{2}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ より点Pは辺OAを直径とする円周上を動く



その円周と直線BMとの交点のうちBに近くない方をP_0とすると

$$|\overrightarrow{BP}|\leqq BP_0=BM+MP_0$$
$$=BM+\frac{1}{2}OA$$
$$=\frac{\sqrt{79}}{2}+\frac{5}{2}$$
$$=\frac{5+\sqrt{79}}{2}$$

これが$|\overrightarrow{BP}|$の最大値となる