全統マーク2018 第2回 数学①

1 [1]

$A=2x^2+(13-3a)x+a^2-5a-24$

(1) $a^2-5a-24=(a+3)(a-8)$ より

$$\begin{array}{ccc} 1 & -(a-8) & -2a+16 \\ 2 & -(a+3) & -a-3 \\ \hline & & -3a+13 \end{array}$$

$\therefore A=(x-a+8)(2x-a-3)$」

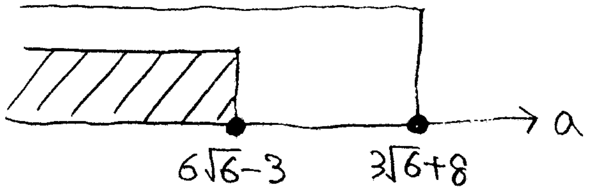
(2) $4x-11\sqrt{6} \leqq -2x+7\sqrt{6}$

$6x \leqq 18\sqrt{6}$　$\therefore x \leqq 3\sqrt{6}$」

$A=0$ とすると $x=a-8,\ \dfrac{a+3}{2}$

$a-8 \leqq 3\sqrt{6}$ のとき $a \leqq 3\sqrt{6}+8$

$\dfrac{a+3}{2} \leqq 3\sqrt{6}$ のとき $a \leqq 6\sqrt{6}-3$



よって $A=0$ を満たすすべての x が不等式①を満たすような a の値の範囲は　$a \leqq 6\sqrt{6}-3$」

[2]

(1) $p: m \geqq 4$ または $n \geqq 4$ より

$\overline{p}: m<4$ かつ $n<4$」

(2) 命題「(qまたはr)$\Rightarrow p$」の対偶

逆にして否定!!

「$\overline{p} \Rightarrow (\overline{q}$かつ$\overline{r})$」

(3) 条件 p にあてはまるのは $m=4, n=6$

このとき q は $(4-3)(4+6-6)>0$

r は $(6-3)(4+6-6)>0$

で、どちらも成り立たない

よって反例は $m=4, n=6$」

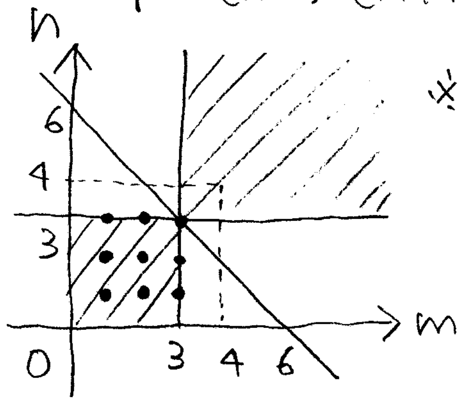
(4) (2)より「(qまたはr)$\Rightarrow p$」の対偶は

「$\overline{p} \Rightarrow (\overline{q}$かつ$\overline{r})$」

(1)より $\overline{p}: m<4$ かつ $n<4$

また、$\overline{q}: (m-3)(m+n-6) \geqq 0$

$\overline{r}: (n-3)(m+n-6) \geqq 0$



※斜線部分が $\overline{q}$かつ$\overline{r}$

命題「$\overline{p} \Rightarrow (\overline{q}$かつ$\overline{r})$」は真なので

命題「(qまたはr)$\Rightarrow p$」も真

(3)より

$\boxed{(q\text{または}r)} \underset{\times}{\overset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} \boxed{p}$

よって十分条件」

[3] $0 \leqq a \leqq 2$

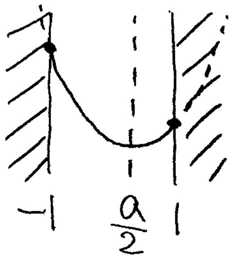
$f(x)=x^2-ax+3a$

$=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+3a$

頂点の座標は $\left(\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a^2}{4}+3a\right)$」

軸の方程式は $x=\dfrac{a}{2}$

$0 \leqq a \leqq 2$ より $0 \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 1$



$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値は

$f(-1)=4a+1$」

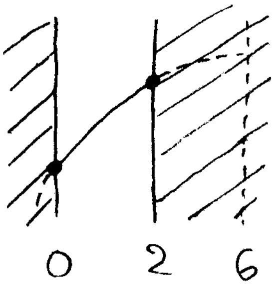
上図より

$p=f(-1)=4a+1$

$q=f(1)=2a+1$

$r=f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+3a$

$$L = p - 2q + r$$
$$= (4a+1) - 2(2a+1) - \frac{a^2}{4} + 3a$$
$$= -\frac{1}{4}a^2 + 3a - 1 」$$
$$= -\frac{1}{4}(a-6)^2 + 8$$

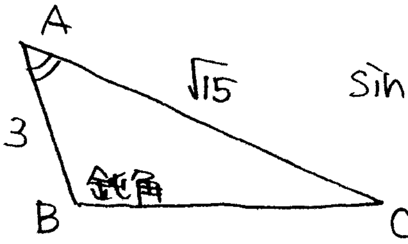


$0 \leqq a \leqq 2$ のとき

Lの最大値は

$4 \ (a=2)$ 」

2 [1]



$\sin\angle BAC = \frac{1}{4}$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{15}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{8} 」$$

$\triangle ABC$の内角において最大角は

$\angle ABC\,(>90^\circ)$ であるから $\angle BAC < 90^\circ$

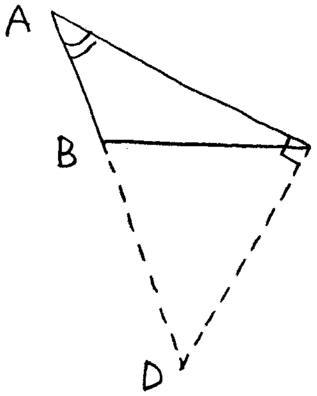
$\therefore \cos\angle BAC > 0$

$$\cos\angle BAC = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} 」$$

余弦定理より

$$BC^2 = 3^2 + (\sqrt{15})^2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{15}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{6}{4}$$

$BC>0$ より $BC = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 」



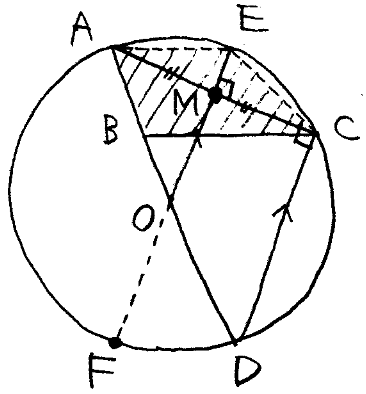
$AD\cos\angle BAC = AC$ より

$$\frac{\sqrt{15}}{4}AD = \sqrt{15}$$

$\therefore AD = 4$ 」

図のように交点M,Fをとる

$$AM = CM = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{15}}{2}$$



$ME = x$ とおくと

$$FM = FE - x = AD - x = 4 - x$$

$ME < FM$ より

$x < 4 - x$

$\therefore x < 2$

方べきの定理より

$$AM \times CM = ME \times FM$$
$$\frac{\sqrt{15}}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{2} = x\times(4-x)$$
$$4x^2 - 16x + 15 = 0$$
$$(2x-3)(2x-5) = 0$$

$x<2$ より $x = \frac{3}{2}$ $\therefore ME = \frac{3}{2}$

ここで $AC \perp ME$ より

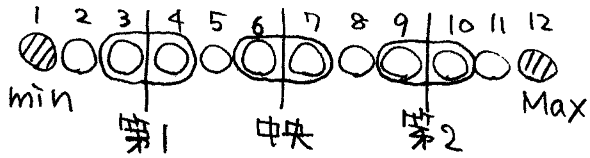
$$\triangle ACE = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot ME$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{15}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

よって四角形ABCEの面積は

$$\triangle ABC + \triangle ACE$$
$$= \frac{3\sqrt{15}}{8} + \frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{9\sqrt{15}}{8} 」$$

[2]

(1) <箱ひげ図>



a…第1四分位数 ×

b…最小値 ×

c…正しそう

→ ②が正解

※それぞれのデータにおいて1月~12月を順位を決めて概算するとよい

(2) 選択肢⓪……右上がりでない ×

〃 ①……右上がり ○

〃 ②……洋服は右下がり ○

〃 ③……10°Cあたりが最高 ×

よって①と②」

(3) $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots$ (ドル)

↓

$X_1, X_2, X_3, \cdots$ (円)

1ドル ↓ 110円

$110Y_n = X_n$

※詳しくやってみました

$$X = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

$$= \frac{110Y_1 + 110Y_2 + \cdots + 110Y_n}{n}$$

$$= 110 \times \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n}$$

$$= 110Y$$

$$\therefore \frac{X}{Y} = 110 」$$

$$S = (\text{2乗の平均}) - X^2$$

$$= \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n} - X^2$$

$$= \frac{(110Y_1)^2 + (110Y_2)^2 + \cdots + (110Y_n)^2}{n} - (110Y)^2$$

$$= 110^2\left(\frac{Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2}{n} - Y^2\right)$$

$$= 110^2 T$$

$$\therefore \frac{S}{T} = 110^2$$

(4)

$$(\text{相関係数}) = \frac{(\text{気と人の共分散})}{(\text{気の標偏})(\text{人の標偏})}$$

$$= \frac{-2895.34}{6.63 \times 1311.9} = -\frac{2895.34}{8697.897}$$

だいたい $-\frac{1}{3}$ ぐらい

よって⓪が正解」

$\boxed{3}$

2　−1

0　0

1枚

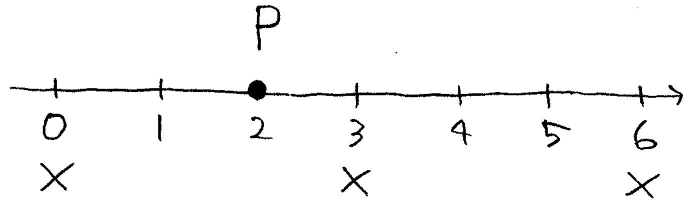
1回の試行で

カード	2	−1	0
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$\boxed{-1}, \boxed{-1} \cdots \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$」

$\boxed{2}, \boxed{-1}$ または $\boxed{-1}, \boxed{2}$

$\cdots \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$」



(1) 試行2回

Pが点6に達するのは $\boxed{2}, \boxed{2}$ のとき

$\therefore \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$」

移動後に点2にあるのは $\boxed{0}, \boxed{0}$ のとき

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$」

移動後に点1または点4にあるのは

$\boxed{-1}, \boxed{0}$ または $\boxed{0}, \boxed{-1}$

または $\boxed{2}, \boxed{0}$ または $\boxed{0}, \boxed{2}$ のとき

$\therefore \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2}$」

(2) 試行3回

移動後に点1または点4にあるのは

$\boxed{-1}, \boxed{0}, \boxed{0}$ または $\boxed{0}, \boxed{-1}, \boxed{0}$

または $\boxed{0}, \boxed{0}, \boxed{-1}$ または

$\boxed{2}, \boxed{0}, \boxed{0}$ または $\boxed{0}, \boxed{2}, \boxed{0}$

または $\boxed{0}, \boxed{0}, \boxed{2}$ のとき

$\therefore \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 3 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 3$

$= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$」

ちょうど3回で移動を終了するのは
移動後に点0，3，6にあるとき

i) 点0のとき

$\boxed{0}$，$\boxed{-1}$，$\boxed{-1}$ または $\boxed{-1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{-1}$

$\therefore \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\times 2=\frac{1}{16}$

ii) 点3のとき

$\boxed{2}$，$\boxed{0}$，$\boxed{-1}$ または $\boxed{0}$，$\boxed{2}$，$\boxed{-1}$

または $\boxed{-1}$，$\boxed{0}$，$\boxed{2}$ または $\boxed{0}$，$\boxed{-1}$，$\boxed{2}$

$\therefore \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\times 4=\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$

iii) 点6のとき

$\boxed{2}$，$\boxed{0}$，$\boxed{2}$ または $\boxed{0}$，$\boxed{2}$，$\boxed{2}$

$\therefore \left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{16}$

以上 i)〜iii) より，ちょうど3回で移動を終了する確率は

$\frac{1}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ 」

(3) 4回以内 → 1〜4回

i) 1回で終了することはない

ii) 2回で終了

$\boxed{-1}$，$\boxed{-1}$ または $\boxed{2}$，$\boxed{2}$

または $\boxed{-1}$，$\boxed{2}$ または $\boxed{2}$，$\boxed{-1}$

$\therefore \left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}=\frac{4}{16}$

iii) 3回で終了

(2) より $\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$

iv) 4回で終了

3回移動した後に点1または点4にあり，次に $\boxed{2}$ また $\boxed{-1}$ をひく

$\therefore \frac{3}{8}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{16}$

以上，i)〜iv) より，4回以内で移動を終了する確率は

$\frac{4}{16}+\frac{4}{16}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$ 」

試行を2回繰り返してPが点1または点4にあり，かつ，4回以内で移動が終了する場合を考える

ア) 3回で終了

3回目に $\boxed{2}$ または $\boxed{-1}$ をひく

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$

イ) 4回で終了

3回目に $\boxed{0}$ をひいてから
4回目に $\boxed{2}$ または $\boxed{-1}$ をひく

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$

以上，ア)，イ) より，試行を2回繰り返してPが点1または点4にあり，かつ，4回以内で移動が終了する確率は

$\frac{4}{16}+\frac{2}{16}=\frac{6}{16}$

ゆえに，求める条件付き確率は

$\frac{\frac{6}{16}}{\frac{11}{16}}=\frac{6}{11}$ 」

$\boxed{4}$ $a=4\underset{\text{aを4で割った商}}{q}+r$ aを4で割った余り

(1) $25=4\cdot 6+1$ $\therefore q=6,\ r=1$

よって $f(25)=6^2+1^2=37$ 」

$2=4\cdot 0+2$ $\therefore q=0,\ r=2$

よって $f(2)=0^2+2^2=4$ 」

(2) 自然数Aを7で割ったときの商をQ(0以上の整数)、余りをR
(R=0,1,2,3,4,5,6)とすると

$A=7Q+R$

$A^2=(7Q+R)^2$

$=49Q^2+14QR+R^2$

$=7(7Q^2+2QR)+R^2$

よって、平方数A^2を7で割った余りはR^2を7で割った余りに等しい

$R^2=0,1,4,9,16,25,36$

ゆえに平方数を7で割った余りは 0, 1, 2, 4」

$f(a)=q^2+r^2$が7の倍数となるには q^2, r^2ともに7の倍数となるしかない

このとき $r=0$ かつ

qを7で割った余りは0」

$q=7k$ (kは0以上の整数) とおくと

$a=4\cdot 7k+0=28k$

$28k \leqq 100$とすると

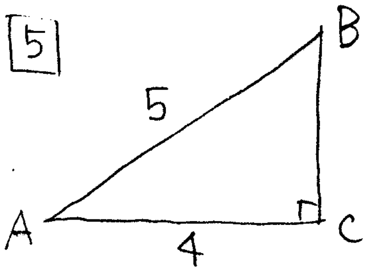
$k \leqq \frac{100}{28}=\frac{25}{7}=3.57\cdots$

$k=1,2,3$ ※$k=0$はダメ

$f(a)$が7の倍数となるaは全部で3個で最大値は

$a=28\cdot 3=84$」

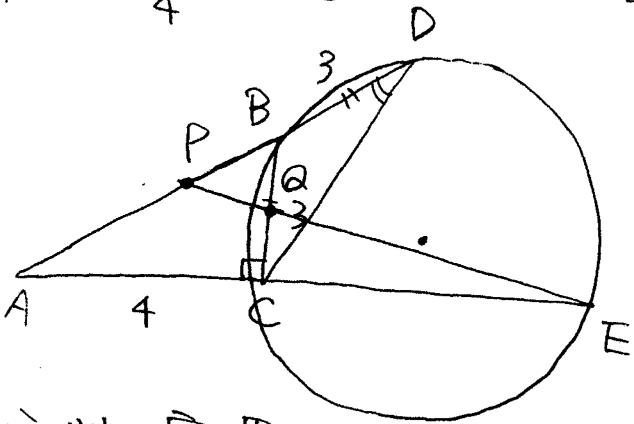
$\boxed{5}$



$BC=\sqrt{5^2-4^2}$

$=\sqrt{25-16}$

$=\sqrt{9}=3$」



方べきの定理より

$AC\cdot AE=AB\cdot AD=5(5+3)=40$」

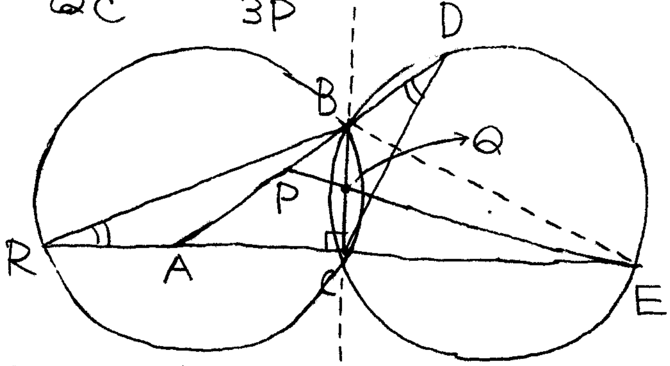
$4AE=40$より $\therefore AE=10$」

メネラウスの定理より

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

$$\frac{P}{5-P}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{10-4}{10}=1$$

$$\therefore \frac{BQ}{QC}=\frac{25-5P}{3P}$$



△BRCの外接円の半径と△BCDの外接円の半径は同じ

$AR=CR-AC=CE-AC=6-4=2$」

△BREの重心が直線PE上にあるのは

$\frac{BQ}{QC}=\frac{2}{1}$のとき

$\frac{25-5P}{3P}=2$ $\quad 25-5P=6P$ $\quad \therefore P=\frac{25}{11}$」