22211

『５ｎ＋１コラッツ予想』の分析

2529 林莉乃

要旨

未解決問題の一つ、コラッツ予想は「すべての自然数ｎに対して、偶数ならば 1/2 倍し奇数ならば３倍して１をたす操作を繰り返したとき、その自然数ｎは必ず１に帰着する」というものである。操作の方法をかえて成立・不成立を見ることで、コラッツ予想の操作方法が上手くできているということを調べた。今回は「3 倍して」のところを「5 倍して」に変更し、1 に帰着するかどうかを、数列の形、偶奇の頻度に注目し研究をした。結果、「5 倍して」に操作を変えると 1 に帰着することが成立しない自然数ｎがあることがわかった。成立しない場合の、操作全体をおおざっぱに見たとき、数を増やしていく操作と減らしていく操作の数によって１への帰着しやすさが変化すると考えられた。

（コラッツ予想の例）

【３からの操作】

３→10→５→16→８→４→２→１

【７からの操作】

７→22→11→34→17→52→26→13→40→20→10→５→16→８→４→２→１

１．目的

「３倍して１たす」操作を他の操作に変えたときに１に帰着するかを考えてコラッツ予想の操作が極めて稀な性質であることを検証する。

２．仮説

(1) コラッツ予想は、極めて稀な性質であるから「３倍して１たす」操作以外では成立しない。

(2)「５倍して１たす」操作の場合、(図１）のように１の位が６のとき分岐が起きる。【７からの操作】でつくった数列には、分岐した１つ目の数でさらに分岐して、その後さらに２つ目の数で分岐する形があった。この形は【１から逆の操作】でつくった数列の形には、書き出した範囲で見つけられなかったため、１に帰着するかどうかは分岐の仕方に違いがあると考えた。

（図１）

↑で５倍して１たす操作を、←で 1/2 倍する操作を表す。

【７からの操作】でつくった数列

24←48←116←⋯
↑
23←46←⋯
↑
9←18←36←⋯
↑
7←⋯

【１から逆の操作】でつくった数列

１←２←４←８←16←32←64←128←⋯
↑
3←6←12←24←48←96←⋯
↑
19←38←76←⋯
↑
15←⋯

（分岐なし）

３．使用したソフト

計算には Excel を使った。

４．研究①『4n+1 コラッツ予想』
nを自然数とする。
nが奇数ならば　$4n+1$、nが偶数ならば　$n/2$
を繰り返した数を書き出す。

５．結果①『4n+1 コラッツ予想』
　$4n+1$は奇数である。更に、$4(4n+1)+1$も奇数である。常に奇数があらわれるため、これを繰り返しても１に帰着することはない。また、偶数倍して１たすと、あらわれる数は奇数のため数字が単調に増加していく。よって、『4n+1 コラッツ予想』だけでなく『(偶数)ｎ＋１コラッツ予想』も、１に帰着することはない。
（例）『4n+1 コラッツ予想』【３からの操作】
　３→13→53→213→853→3413→13653→…
　奇数が繰り返され１に帰着しない。

６．研究②『5n+1 コラッツ予想』
nを自然数とする。
nが奇数ならば　$5n+1$、nが偶数ならば　$n/2$
を繰り返した数を書き出す。

７．結果②『5n+1 コラッツ予想』
A：３→16→８→４→２→１（○）
B：５→26→13→66→33→166→83→416→208→104→52→26→13→・・・
（繰り返しが起こる）
C：７→36→18→９→46→23→116→58→29→146→73→366→183→916→458→・・・
（無限に増加する？）
D：17→86→43→216→108→54→27→136→68→34→17→86→43→・・・
（繰り返しが起こる）

　A は２の累乗数があらわれ、１に帰着した。「５倍して１たす」操作でも成立する場合はある。
　B は 13 からはじまる、D は 17 からはじまるループに入った。「５倍して１たす」操作では成立しなかった。
　C は行く先が何になるのかはわからず、どんどん増加しそうと考えられるが、成立か不成立か判断できなかった。
　また。【７からの操作】のときに本当にどんどん増加するのかという新たな疑問が生まれた。

８．研究③
【７からの操作】でつくった数列にある（分岐した１つ目の数でさらに分岐して、その後さらに２つ目の数で分岐する）形を持つ数列を満たす自然数l, n, mを求める。（図２）
（図２）
$5n+1 \leftarrow \cdots$
$\uparrow$
$n \quad \leftarrow 2n \leftarrow 4n \leftarrow \cdots$
$\uparrow$
$m \quad \leftarrow 2m \leftarrow 4m \leftarrow \cdots$
$\uparrow$
$l \quad \leftarrow \cdots$

分岐後の数はすべて奇数だから、l, m, n は奇数である。
数列より、
$$\begin{cases} 5l+1=4m \ldots ① \\ 5m+1=2m \ldots ② \end{cases}$$
また、l, m, n は奇数より、
$$\begin{cases} l=2l'+1 \\ m=2m'+1 \\ n=2n'+1 \end{cases}$$
①②に代入して整理すると、
①　$5(2l'+1)+1=4(2m'+1)$
　$10l'+6=8m'+4$
　$5l+1=4m'$…①'
②　$5(2m'+1)+1=2(2n'+1)$
　$10m'+6=4n'+2$
　$5m'+2=2n'$　…②'
①' ②' より
$$\begin{cases} 4m' \equiv 1 (mod5) \\ 5m' \equiv 0 (mod2) \end{cases}$$
上の２式から
$4m'$は５でわると１余る数であるから、
m'は５でわると４余る数かつ偶数である。

つまり $\begin{cases} m' \equiv 4(mod5) \\ m' \equiv 0(mod2) \end{cases}$

この関係から、自然数 a、b を使って

$m' = 5a + 4$、$m' = 2b \cdots (*)$ とあらわせる。

１次不定方程式 $5a + 4 = 2b$をとく。

これを満たす解の一つ、$a = 2$、$b = 7$ に対して

$$\begin{array}{rl} & 5 \times a + 4 = 2 \times b \\ -) & 5 \times 2 + 4 = 2 \times 7 \\ \hline & 5(a-2) = 2(b-7) \end{array}$$

５と２は互いに素なので整数 c を用いて

$a - 2 = 2c$

$b - 7 = 5c$

$b = 5 + 7c$ より

$(*)$に代入して

$m' = 2(5c + 7)$

$= 10c + 14$

$= 10(c + 1) + 4$

cは整数なので $k = c + 1$（k:整数）として

$m' = 10k + 4$

①’②’に代入して

$5l' + 1 = 4(10k + 4)$

$l' = 8k + 3$

$5(10k + 4) + 2 = 2n'$

$n' = 25k + 11$

以上より

$$\begin{cases} l = 16k + 7 \\ m = 20k + 9 \\ n = 50k + 23 \end{cases}$$

【７からの操作】でつくった数列にある（分岐した１つ目の数でさらに分岐して、その後さらに２つ目の数で分岐する）形の最初の数 l を一般化した。

この k に 0～1300 を代入してそれぞれの数に 800 回「自然数nに対してnが奇数なら$5n + 1$、nが偶数なら$n/2$」の操作を行った。

９．結果③

k＝21、702、918 が2^{12}

k＝668、1069 が2^{8}

k＝813 が2^{4}

につながり、１に帰着した。【７からの操作】でつくった数列にある（分岐した１つ目の数でさらに分岐して、その後さらに２つ目の数で分岐する）形をもち、１に帰着し成立する数は存在した。

10．研究④

数の推移をおおざっぱにみる。また、〔研究④〕から操作を、nが奇数なら、「$(5n + 1)/2$」、nが偶数なら、「$n/2$」に変える。これは、「５倍して１たす」操作は奇数を必ず偶数にするので、余計な項を減らすために行う。

〔研究②〕でみられたどんどん増加しそうであった【７からの操作】でつくった数列の推移をみるために、Excel で 400 回、奇数なら「５倍して１たしさらに割る２する」、偶数なら「1/2 倍する」操作を行った。他にも【７からの操作】のときとは違う形で同じくどんどん増加しそうであった【21 からの操作】や【25 からの操作】でつくった数列にも同様の操作を行った。

11．結果④

７→18→９→23→58→29→73→183→458→229→573→…

【７からの操作】のときは上のようになり、400 回のうち奇数 193 回偶数 207 回現れた。また、【21 からの操作】のときは奇数 192 回偶数 208 回、【25 からの操作】のときは奇数 191 回偶数 209 回であった。ほぼ同じくらいの割合で奇数と偶数が登場したと考えられる。

また、「自然数nに対してnが奇数なら$(5n + 1)/2$、nが偶数なら$n/2$」はおおざっぱにみると、「たす１」はnがどんどん大きくなっていったときに変化する量がとても小さいため、無視できるものとみることができるので、奇数のとき数を 5/2 倍に、偶数の時数を 1/2 倍していると考えられる。

ふたつのことから変更後の操作は、数を 1/2 の割合で 5/2 倍し、1/2 の割合で 1/2 倍しているということである。これは相乗平均にして、

$$\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}} \fallingdotseq 1.12 > 1$$

である。数を 1.12 倍し続けるため、数を増加させていくことになる。

ここで、本来の『3n+1 コラッツ予想』の操作を「自然数nに対し、n が奇数なら$(3n+1)/2$、n が偶数なら$n/2$」としても、偶奇のあらわれる割合はほぼ同じであった。数を 1/2 の割合で 3/2 倍し、1/2 の割合で 1/2 倍しているということなので、相乗平均は、

$$\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}} \fallingdotseq 0.86 < 1$$

である。数を 0.86 倍し続けるため、数を小さくしていくことになる。このため、『3n+1 コラッツ予想』は数を１に帰着させる操作とみることができる。

また、「5 倍して１たす」操作に変更したとき、偶数が出てくる頻度が多いほうが１に帰着しやすいのではないかと考えられる。

12. 考察

今回の操作でつくった数列は、研究(2)のように三元一次不定方程式を解くことで、数列に現れる狙った形をつくりだすことができる。【７からの操作】でつくった数列にある（分岐した１つ目の数でさらに分岐して、その後さらに２つ目の数で分岐する）形が【１から逆の操作】でつくった数列にも登場するため、数列の形と“１に帰着するかどうか(成立するのか)”には関係がないのではと考えられる。

増やす機会より減らす機会のほうが多いとき数の増加をおさえられ、２の累乗の数になると１に帰着する。数が繰り返されて１に帰着しない場合があり、数が増加していく場合があると推定される。

13. 展望

より割る操作の回数を増やした次の操作(1)(2)でつくった数列を考え、１に帰着しやすくして、『3n+1 コラッツ予想』を比べる。

操作（1） ３を法とする。

$$n/3 \quad (n \equiv 0)$$
$$(4n-1)/3 \quad (n \equiv 1)$$
$$(4n+1)/3 \quad (n \equiv 2)$$

（例）【５からの操作】でつくった数列

５→７→９→３→１

（例）【８からの操作】でつくった数列

８→11→15→５→…→１

操作（2） $n/2 \ (n\text{: 偶数})$

$n/3 \quad (n\text{: ３で割れる奇数})$

$(5n+1)/2 \quad (n\text{: ３で割れない奇数})$

（例）【５からの操作】でつくった数列

５→13→33→11→28→14→７→18→９→３→１

さらに、研究(１)②でループした数列について、ループする数の特徴や理由を探りたい。

14. まとめ

３という数には５にはない何かがあり、すぐわかるような性質や特徴の違いからは数の推移の原因がわからないことがコラッツ予想の面白さだと感じた。『3n+1 コラッツ予想』は、おおざっぱに見たからではあるが、だんだん数を小さくする操作になっていて、すばらしい性質をもっていると感じた。

15. 謝辞

ご協力いただいた、九州大学助教松坂俊輝先生、本校数学科の先生方、ありがとうございました。