１年課題研究『数学発見』　研究指南書

１年(　)組 氏名(　　　　　　　　)

これは課題研究で数学を研究するための練習です。最後に，レポートを作成してグループ発表します。各自テーマを一つ決めて問題に取り組み，「分かりやすく」「筋道立てて」「簡潔に」説明しましょう。余力のある人はチャレンジ問題にも取り組んでみましょう。

1　31ゲームの必勝法

n 個の石を A さんと B さんで交互に取り合うゲームを行う。最後の石を取った人を負けとする。

(1)　$n=31$ とする。1 回に 3 個まで石を取ってよいとする。先攻の人はどのように石を取ればこのゲームに勝てるか。

(2)　一般の n について，このゲームの必勝法を記述せよ。

(3)　1 回に取ってよい石の数を 2 個，4 個，6 個のいずれかとする。必勝法はどうなるか。

【チャレンジ】

1 回に取ってよい石の数を自由に決めて，必勝法を考えてみよう。

2　正多面体の塗り分け

正六面体や，正四面体のように，次の条件を満たす凸多面体を「正多面体」という。

①各面はすべて合同な正多角形である。
②各頂点に集まる面の数はすべて等しい。

様々な正多面体について，全ての面を異なる色で塗った場合，色の塗り方が何通りあるか。ただし、回転させて一致するものは同一とみなす。

【チャレンジ】

正多面体を面の数より少ない色で塗ることを考える。隣り合う面が同じ色にならないように塗るとすると、使う色の数ごとに何通りの塗り方があるか。

3　正多面体の体積

一辺の長さが 1 である正八面体の体積を求めよ。

【チャレンジ】

一辺の長さが 1 である正二十面体の体積を求めよ。

$\boxed{4}$　場合の数に挑戦

以下の条件を満たす 1000 以下の自然数 n の個数を求めよ。

条件： n は 3 の倍数または 3 がつく自然数である。　　　例)　$n=27$，$n=31$

【チャレンジ】

この条件を満たす 10^k 以下の自然数 n の個数を求めよ。

$\boxed{5}$　アルキメデスの円周率近似

円周率 π の近似値は 3.141592… と知られている。古くから世界中で円周率の近似値が計算されているが，その一つであるアルキメデス（紀元前３世紀）の手法をもとに計算してみよう。必要に応じて $\sqrt{3}=1.73$， $\sin 22.5^\circ=0.383$， $\tan 22.5^\circ=0.414$ を用いてよい。

半径 1 の円の円周は $^{ア}\boxed{}$ である。円に内接する正多角形と，外接する正多角形を考えよう。

(1)　半径 1 の円に内接する正六角形の周の長さは $^{イ}\boxed{}$ であり，外接する正六角形の周の長さは $^{ウ}\boxed{}$ である。

よって $\boxed{イ}<\boxed{ア}<\boxed{ウ}$ が成り立つため， $^{エ}\boxed{}<\pi<{}^{オ}\boxed{}$ である。 解答　$3<\pi<3.46$

(2)　正八角形で同様の計算をして，円周率の値を近似せよ。 解答　$3.06<\pi<3.31$

【チャレンジ】

教科書の三角比表を用いて，他の正多角形でも計算してみよう。より正確な近似を得るにはどうしたらよいか。

【チャレンジ】

円周率の近似値を求める手法は他にもある。探してその仕組みを解明しよう。

6　最大の機内持込み手荷物

日本の航空会社では、飛行機内に持ち込める荷物に制限がある。

条件：3 辺（縦・横・高さ）の和が 115 cm 以内 （55cm × 40cm × 25cm以内）

機内に持ち込める荷物の体積の最大値と縦・横・高さの長さを求めたい。

(1)　まずは簡単な例を考えてみよう。

縦 x，横 y，高さ z とする。3 辺の和が 20 cm，縦，横，高さがそれぞれ 12 cm，8 cm，6 cm 以内である箱の体積の最大値と，縦・横・高さの長さを考えてみよう。

(2)　体積が最大となる場合を求めてみよう。

解答　$0<x\leqq 12$，$0<y\leqq 8$，$0<z\leqq 6$ ･･･①　　$x+y+z=20$ ･･･②

②より $z=20-(x+y)$ であるから

①より　$0<20-(x+y)\leqq 6$　すなわち　$14-y\leqq x<20-y$

容器の体積を V とおくと，$V=xyz=-y\left(x-\dfrac{20-y}{2}\right)^2+\dfrac{y(20-y)^2}{4}$

ここで，$\dfrac{20-y}{2}\leqq 14-y$ であるから V は $x=14-y$，$z=6$ のとき最大となる。

このとき，$V=(14-y)\cdot y\cdot 6=-6(y-7)^2+294$ より $y=7$ のとき V は最大となる。

よって，縦 7cm，横 7cm，高さ 6cmのとき，体積は最大で294 cm^3