32102

じゃんけんであいこの確率を小さくするには

3616 佐藤聖也　3518 田中隆彦　3638 宮地駿衣

要旨

あいこの確率が小さくなり勝敗が早くつくように 3 つのルールを考えて考察した。
まず、手の出し方の種類を増やした。あいこの確率は小さくなったがルールが複雑化する。
次に、一度にじゃんけんをする人数を減らした。あいこの確率は小さくなる。
最後に、王様じゃんけんをした。2 人の時は確率が大きかったが人数が増えるにつれて確率は小さくなる。
よって、王様じゃんけんが最もあいこの確率が小さくなり勝敗が早くつく。

1．目的

大人数でじゃんけんをするとあいこが続きなかなか勝敗がつかない。あいこの確率が小さくなれば早く勝敗がつくため、新しいじゃんけんのルールを考えることを目的とした。

2．仮説

(1) じゃんけんの手の出し方の種類を増やす
(2) じゃんけんをする人数を減らす
(3) 王様じゃんけんをする

という 3 つの方法であいこの確率が小さくなると考えた。

3．前提条件

n人で通常のじゃんけんを行ったときにあいことなるのは次の 2 つの場合である。

ⅰ）1 種類の手だけ出る場合…3 通り
ⅱ）3 種類すべての手が出る場合
…$3^n-3\cdot 2^n+3$ 通り

すべての手の出し方は3^n通りだから、通常のじゃんけんのあいこの確率は$\dfrac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}$となる。

1 回で勝敗がつく確率をpとすると、勝敗がつくまでに行うじゃんけんの回数とその確率は表 1 のようになる。
勝敗がつくまでの回数の期待値は次のようになる。

回数	1	2	3	…	n
確率	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	…	$p(1-p)^{n-1}$

表 1　勝敗がつくまでの回数と確率

よって、期待値はこのように表せる。

$$E=p+2p(1-p)+3p(1-p)^2+\cdots+np(1-p)^{n-1}+\cdots=\frac{1}{p}$$

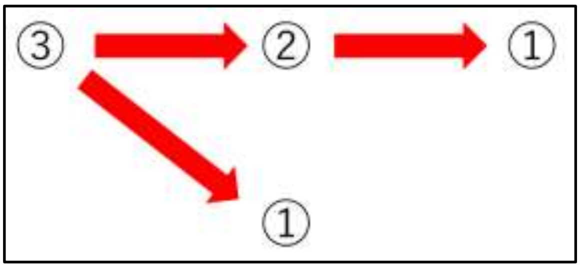

図 1　3 人から勝者が 1 人になる様子

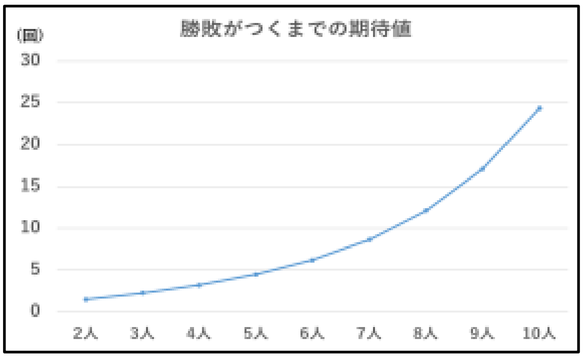

図 2　通常のじゃんけんの期待値

4．方法

Ⅰ　じゃんけんを 1 回したときのあいこの確率を求める。

(1) じゃんけんの手の出し方の種類を増やす

①ルール設定

・手の出し方を、グー、チョキ、パー、$\underline{\alpha}$、$\underline{\beta}$ の 5 種類とする。
このとき、それぞれの手の出し方の関係は図 1 のようになり、どの手を出したときでも勝ち負けの確率が等しくなるように設定した。

・一度のじゃんけんで 3 種類の手が出たとき、その 3 つの手がそれぞれ 1 種類に勝ち 1 種類に負けるときは、あいことなる。例えばグー、α、βが出るとあいことなり、グー、チョキ、βが出るとβが勝つ。

・一度のじゃんけんで 4 種類の手が出たとき、2 種類に勝ち 1 種類に負ける手が 2 つ、1 種類に勝ち 2 種類に負ける手が 2 つあるため、前者が勝ち、後者が負けて勝敗がつく。

・一度のじゃんけんで 5 種類の手が出たときはあいこである。

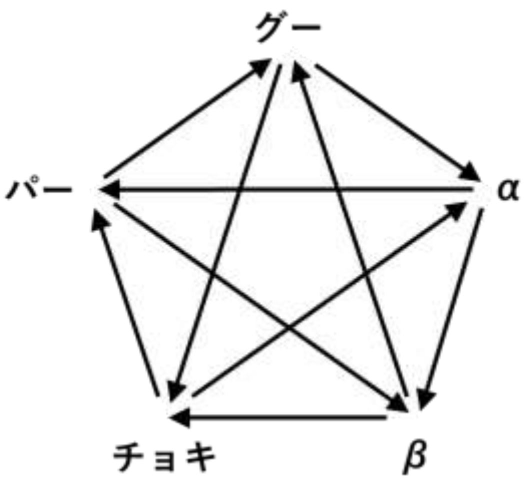

図 3　5 種類の手の出し方の関係

②確率導出

手の出し方が 5 種類のじゃんけんであいことなるのは次の 3 つの場合である。

i) 1 種類の手だけ出る場合…5 通り

ii) 3 種類の手が出るうち、あいことなる場合
…$(3^n - 3 \cdot 2^n + 4) \times 5$ 通り

iii) 5 種類すべての手が出る場合
…$5^n - 5 \cdot 4^n + 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^n + 5$ 通り

すべての手の出し方は5^n通りだから、手の出し方が 5 種類のじゃんけんのあいこの確率は

$\frac{5^{n-1} - 4^n + 3^{n+1} - 5 \cdot 2^n + 5}{5^{n-1}}$ である。

同様にして手の出し方が 7 種類、9 種類のときのあいこの確率を求めるとそれぞれ

$\frac{7^{n-1} - 6^n + 4 \cdot 5^n - 10 \cdot 4^n + 17 \cdot 3^n - 19 \cdot 2^n + 13}{7^{n-1}}$、

$\frac{9^{n-1} - 8^n + 5 \cdot 7^n - 98 \cdot 6^{n-1} + 38 \cdot 5^n - 4^{n+3} + 233 \cdot 3^{n-1} - 65 \cdot 2^n + 34}{9^{n-1}}$

である。

③結果

②の確率をグラフに表すと図 4 のようになる。手の出し方の種類を増やすほど、あいこの確率が小さくなることが分かる。

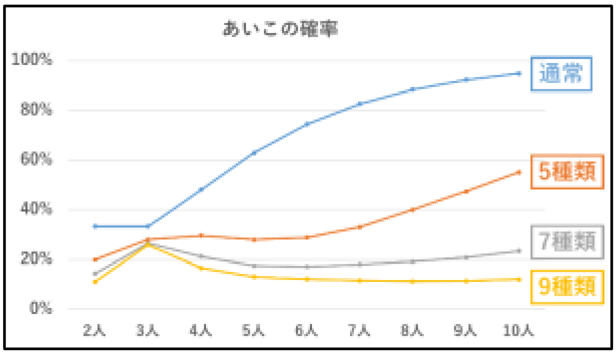

図 4　(1) でのあいこの確率

(2) 一度にじゃんけんをする人数を減らす

①ルール設定

・じゃんけんをする人を複数のグループに分けることで、一度にじゃんけんする人数を減らす。

・それぞれのグループの人数にできるだけ差ができないように分ける。

(例) ・7 人を 3 人と 4 人の 2 グループ
・7 人を 2 人と 2 人と 3 人の 3 グループ
に分ける。

・「あいこ」とは、すべてのグループがあいこのときとする。

②確率導出

グループを 2 つに分けた場合どちらのグループ

もあいこになるのは、それぞれのグループであいこになる確率をかけ合わせたものとなる。
例えば、7 人を 3 人と 4 人に分けたとき

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{27}=\frac{13}{81}\fallingdotseq 0.160 \quad (16.0\%)$$

7 人を 2 人と 2 人と 3 人に分けたとき

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}\fallingdotseq 0.037 \quad (3.7\%)$$

③結果

②のように計算をしてその確率をグラフに表すと図 5 のようになる。グループの数を増やすとあいこの確率が小さくなることが分かる。

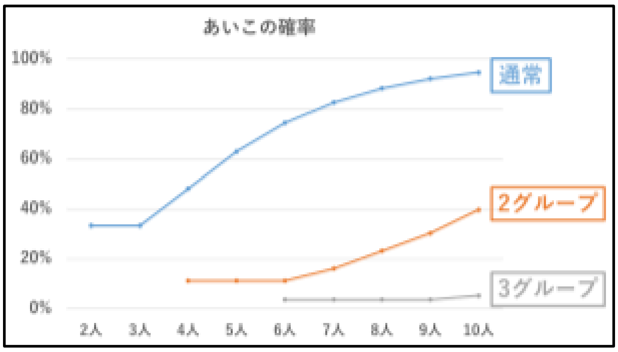

図 5 (2) でのあいこの確率

勝者が一人になるまでじゃんけんをする回数の期待値を調べた。期待値の計算は、グループに分けたとき人数が最も多いグループの、勝者が一人になるまでの回数の期待値と、勝ち残った人でじゃんけんをした時勝者が一人になるまでの回数の期待値を足して求めた。どちらも通常のじゃんけんの回数の期待値よりも小さくなっていることが分かる。

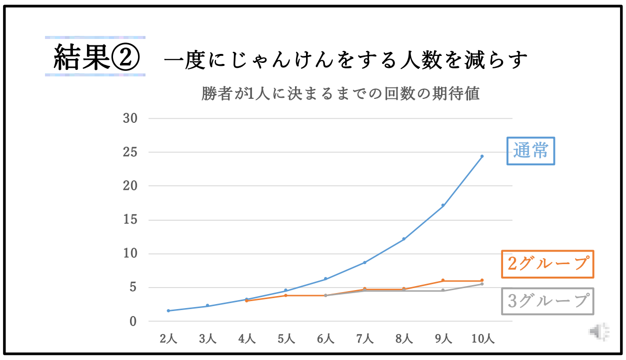

図 6 (2) での回数の期待値

(3) 王様じゃんけんをする

①ルール設定

- じゃんけんをする人とは別に王様がいるとする。
- 王様とあいこの場合も「負け」とする。
- 王様に全員が勝つ、または全員が「負け」となる場合を「あいこ」とする。

図 7 (3) のルールの例

②確率導出

n人で王様じゃんけんをした時のあいこの確率は、$\frac{2^n+1}{3^n}$である。

③結果

②の確率をグラフに表すと図 8 のようになる。人数を増やすとあいこの確率が下がっていくことが分かる。

また (2) と同様に回数の期待値も求めた。通常のじゃんけんの期待値よりも小さくなっていることが分かる。

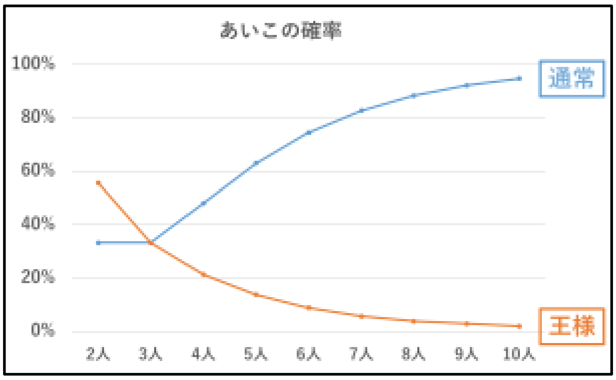

図 8　(3) でのあいこの確率

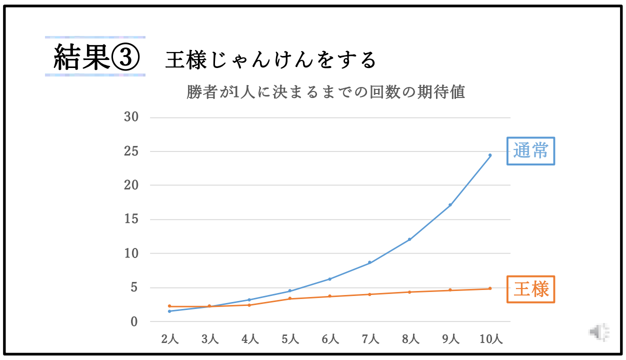

図 9　(3) での回数の期待値

5．考察

(1) では、手の出し方の種類を増やすことで確率は小さくなった。しかし手の出し方の種類を増やすことによって、ルールが複雑化した。

(2) では、グループに分けるとあいこの確率は小さくなった。

また、(1) (2) ではじゃんけんをする人が増えるほどあいこの確率は大きくなったが、(3) では人数が増えるとあいこの確率は小さくなり続けた。

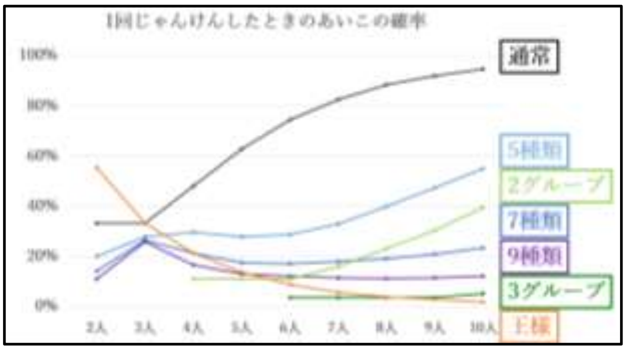

図 10　(1)～(3) のあいこの確率

また今回 (2) (3) の期待値を求めたがさらに人数を増やしていった時の最終的にどの方法が最も効率がいいのかを求められていないので今回結論の考慮には含めなかった。

これらのことから、我々は「王様じゃんけん最強」という結論を出した。しかし、今回行った 3 つの方法はすべてじゃんけんを 1 回したときの確率を求めたため、最後の 1 人を決めることを目的としたじゃんけんとは少し外れてしまっていた。したがって、今回の方法から得られたデータから、最後の一人を決めたいとき「王様じゃんけん最強」と言い切ることはできないと考えられる。

6．展望

通常のじゃんけんのルールだけでなく (1)～(3) の方法でも勝者が 1 人に決まるまでの期待値を求めていく。またこれらの確率と期待値を一般化して結果を照らし合わせてどの方法が最も効率がいいかを調べていく。

7．謝辞

実験方法や計算方法について意見をくださった数学科の先生方ありがとうございました。