32101

ハノイの塔

3539 吉村駿希　3540 吉村悠平　3627 西尾愛菜

要旨

ハノイの塔において柱 3 本、円盤n枚のときの最小手数は知られている。本研究では、柱の本数を増やしたときの最小手数の変化と規則性を調べた。まず、柱が 3 本の場合の証明にならって柱が 4 本の場合の漸化式を立てて検討した。続いて、柱を 4 本にしたとき、最小手数となった値の規則性を利用して最小手数を算出した。それらから、柱 4 本では 3 本と比べ最小手数が格段に減ることが分かった。

1．目的

ゲームを構成する条件の変更により、どれほど最小手数が減り、どのような規則性があるのか知る。

2．ハノイの塔について

ハノイの塔とは、フランスの数学者リュカ(1842-91)が考案した次のようなパズルである。

〇使うもの

・中央に穴が開いた大きさの違う円盤(n枚)

・3 本の柱(円盤がはまるようになっている)

〇目的

・3 本の柱のうち 1 本にn枚の円盤が下から大きい順にはまっている。

・柱にはまった円盤をルールに従って全て別の柱に移動させる。

ルール

・1 回につき 1 枚の円盤を移動させる。

・円盤の上には、それよりも大きな円盤を乗せることはできない。

・円盤は柱以外の場所に置いてはいけない。

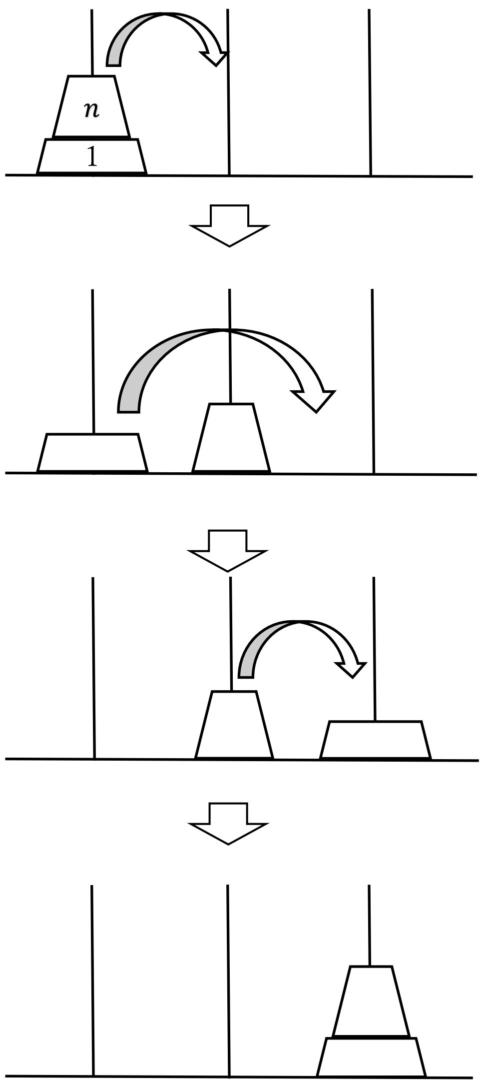
3．柱が 3 本のハノイの塔

円盤の枚数がn枚のときの最小手数を a_n とする。(n+1)枚のとき、円盤は次のような手順で動かすことになる。(図 1 参照)

(i) n枚を 3 本の柱を使って移動させる。

(ii) 残りの 1 枚をあいている柱に移動させる。

(iii) n枚を(ii)で移動させた 1 枚の上に移動させる。



(図 1)

これより漸化式は、$a_{n+1} = 2a_n + 1$ となり、これを解くことで$a_n = 2^n - 1$ を導くことができる。

４．仮説

・円盤の枚数が同じならば、柱の本数を増やすと手数が少なくなる。

・柱が３本である場合と比べて、柱を４本にすると半分ほどの手数になる。

・柱が３本のハノイの塔の漸化式を参考にして、柱が４本の場合についての漸化式を求めることができる。

５．研究の手順

A)　柱が３本のハノイの塔の漸化式を参考にして、柱が４本の場合についての漸化式を立てる。

→規則性を見出し、その規則性についての証明を行う。

B)　(A)で求めた式から最小手数を算出し、規則性に基づいて一般項に関する式を立てる。

→柱が３本の場合と柱が４本の場合の最小手数を比較し、仮説の検証を行う。

６．方法

A)　４本のハノイの塔の場合は次のような手順で円盤を動かすことになる。(図２参照)

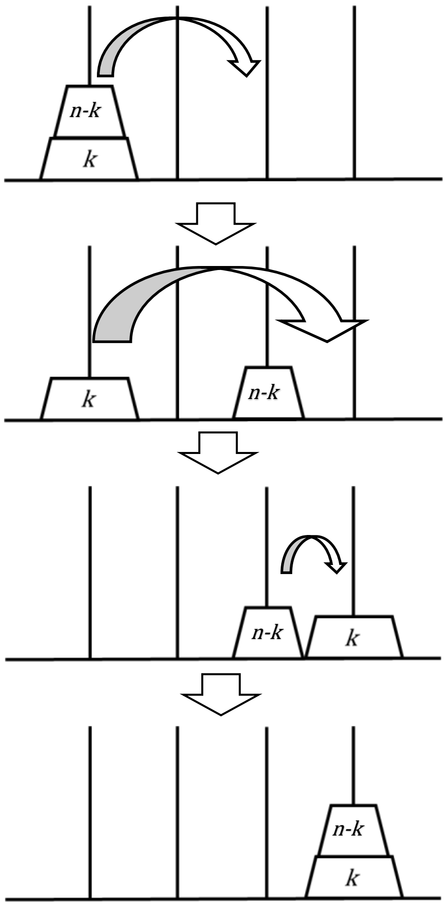
(i) n枚の円盤をk枚と$(n-k)$枚とに分ける。

(ii) $(n-k)$枚を、４本の柱を使って移動させる。

(iii) k枚を３本の柱を使い移動させる。

(iv) $(n-k)$枚を４本の柱を使い、k枚の上に移動させる。

k枚は(i)で移動させた円盤よりも大きいため、柱は残りの３本しか使うことができない。



(図 2)

n枚の円盤をk枚と$(n-k)$枚とに分けたときの最小手数を$H(n,k)$とすると$H(n,k)$は以下のような式で表すことができる。

$$H(n,k) = 2H_{n-k} + 2^k - 1$$

H_nはこの式から求められる値の最小値をとるので、

$$H_n = \min_{1 \leqq k \leqq n-1} H(n,k)$$

である。

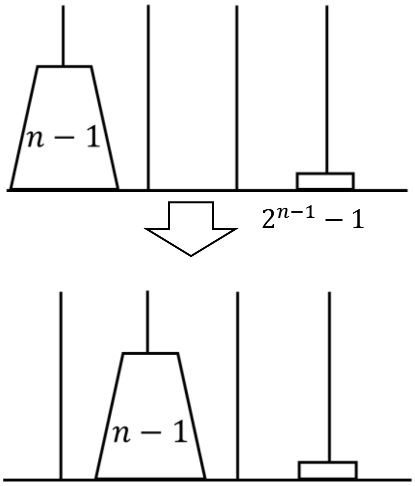
表１は柱が３本のハノイの塔の最小手数a_n、Ⅰで立てた式から求められる値H_n、$H(n,k)$にkの値を順に代入した値をまとめたものである。

n	k	l	Hn	H(n,k) k=1	2	3	4	5	6	7	8	an
1	1	1	1	1								1
2	2	1	3	3	3							3
3	2	2	5	7	5	7						7
4	3	1	9	11	9	9	15					15
5	3	2	13	19	13	13	17	31				31
6	3	3	17	27	21	17	21	33	63			63
7	4	1	25	35	29	25	25	37	65	127		127
8	4	2	33	51	37	33	33	41	69	129	255	255
9	4	3	41	67	53	41	41	49	73	133	257	511
10	4	4	49	83	69	57	49	57	81	137	261	1023

(表 1)

坂口慶多さん（千葉県立船橋高等学校）より

柱が 4 本のとき、図 3 のように 1 番上の円盤 1 枚が別の柱に移動している場合、$(n-1)$ 枚は 3 本で移動させなければいけない。



（図 3）

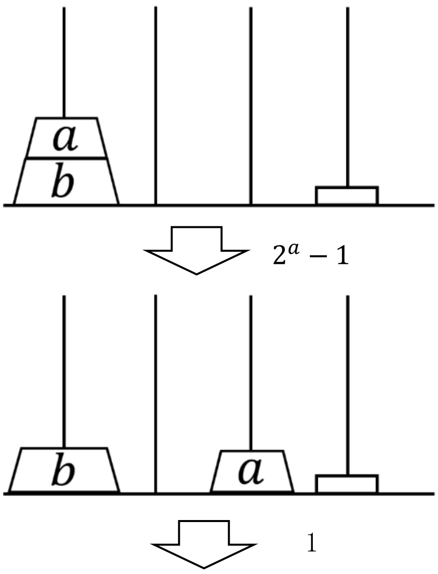
この場合の枚数を $(n-1)$ 枚として移動方法を以下のいずれかで考える。

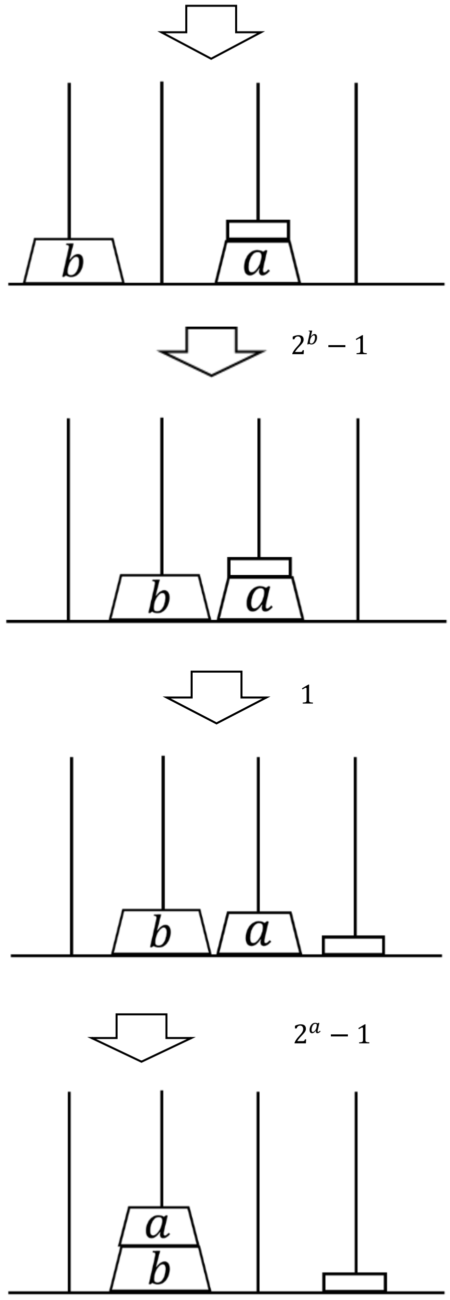
（Ⅰ）$(n-1)$枚を分割しないで考える。

（Ⅱ）$(n-1)$ 枚をa枚とb枚に分割して考える。
　（図 4 参照）

（Ⅲ）$(n-1)$枚をa枚とb枚とc枚に分割して考える。

（Ⅳ）…





（図 4）

（Ⅰ）のとき、$(n-1)$枚を移動させるのに必要な最小手数は

$$2^{n-1}-1$$

（Ⅱ）のとき、

$$(2^a-1)+1+(2^b-1)+1+(2^a-1)$$
$$=2^{a+1}+2^b-1$$

相加相乗平均より

$$2^{a+1}+2^b-1 \geqq 2\sqrt{2^{a+b+1}}-1=2\sqrt{2^n}-1$$

等号成立は、$a+1=b$ のときであるので、

$a+1$ とb が最も近い値になればよい。

（Ⅲ）のとき、最小手数は

$$2(2^{a+1}+2^b-1)+(2^c-1)+2 = 2^{a+2}+2^{b+1}+2^c-1$$

相加相乗平均の等号成立は、

$a+2=b+1=c$ のときであるので、

$a+2$ と$b+1$ と c が最も近い値になればよい。

3 つ以上に分割して考える（Ⅲ）（Ⅳ）以降も同様となるので、（Ⅰ）（Ⅱ）について考えればよい。

ここで、$n-1$≧4 のとき$n-1$を分割すると、最小となる。$n-1$ =3 のときは分割するしないにかかわらず、手数は変わらない。

各$n(=1,2,3,\dots)$に対応する$n-1, a+1, b$は表 2 のようになる。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	⋯
n − 1	0	1	2	3					
a+1				2	3	3	4	4	
b				2	2	3	3	4	
H_n	1	3	5	9	13	17	25	33	⋯

（表 2）

よって、分割した一番上の円盤が 3 枚以上のとき、分割することにする。

ここで、手数が最小になるときの分割回数を最適分割回数と言うとする。

k=(最適分割回数)+1 とすると、n, kの関係は表 3 のようになる

n	1	2	3	4	5	6	7	8	⋯
k	1	2	2	3	3	3	4	4	⋯

（表 3）

kを群数列とみなすと、n=1, 3, 6, 10⋯は各群の末項になる。

このとき、第k群の末項は、

$$n=1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

つまりkは、

$$\frac{1}{2}k(k-1)+1 \leqq n \leqq \frac{1}{2}k(k+1)$$

を満たす整数である。

これを満たすkの範囲は、上記の二次不等式を解いて、

$$k^2-k+2(1-n) \leqq 0$$

$$\frac{1-\sqrt{8n-7}}{2} \leqq k \leqq \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$$

kは最大の整数であるので

$$\frac{1-\sqrt{8n-7}}{2} < k \leqq \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$$

となる。

これを満たす最大の整数kは、ガウス記号を用いて、

$$k=\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$$

と表せる。

７．結果

B) 柱が 4 本のハノイの塔の最小手数をH_nとし、表にまとめると表 4 のようになった。

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{k}$	0	1	2	2	3	3	3
$\boldsymbol{H_n}$	0	1	3	5	9	13	17
$\boldsymbol{H_{n+1}-H_n}$	1	2	2	4	4	4	8

（表 4）

法則性を見つけ出すために、$H_0=0$として階差をとった。ここで求められた階差を群数列とみなして式を立てる。

1 ｜ 2, 2 ｜ 4, 4, 4 ｜ 8, 8, 8, 8 ｜⋯

この群数列にみられる規則性は次の通りである。

① 第k群にはk個の項が入る。

② 第k群の項の数はすべて2^{k-1}である。

ここで、$n=\frac{1}{2}k(k-1)+l\ (1 \leq l \leq k)$と表す。

これを満たす整数k,lがただ1組存在する。

これを用いてH_nの一般項を求める。

まず、$(k-1)$群までの和を考える。$(k-1)$群までの和をSとすると、

$$S=\sum_{p=1}^{k-1} p\cdot 2^{p-1}$$

である。これより、

$$\begin{array}{rl} S &= 1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+(k-1)\cdot 2^{k-2} \\ -)\ 2S &= 1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(k-1)\cdot 2^{k-1} \\ \hline -S &= 2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{k-2}-(k-1)\cdot 2^{k-1} \\ &= \frac{1\cdot(2^{k-1}-1)}{2-1}-(k-1)\cdot 2^{k-1} \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= (k-1)\cdot 2^{k-1}-(2^{k-1}-1) \\ &= (\mathrm{k}-2)\cdot 2^{k-1}+1 \end{aligned}$$

となる。

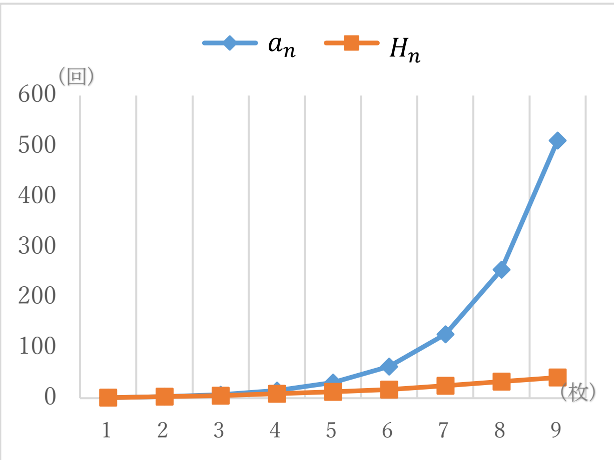
次に第k群の初項から第l項までの和を考える。和をS'とすると、$S'=l\cdot 2^{k-1}$である。

最小手数は$S+S'$であるので、

$n=\frac{1}{2}k(k-1)+l\ (1\leqq l\leqq k)$ であるk,lに対して、

$$\begin{aligned} H_n &= S+S' \\ &= (\mathrm{k}-2)\cdot 2^{k-1}+1+l\cdot 2^{k-1} \\ &= (k+l-2)\cdot 2^{k-1}+1 \end{aligned}$$

となる。



（グラフ）

柱が3本の場合と4本の場合の最小手数を比較するグラフを作成したところ、左下のグラフのようになる。

グラフより、柱の本数を3本から4本に増やすと、最小手数の大幅な減少が見られる。

８．考察

・ハノイの塔の柱を増やすほど、より少ない手数で円盤を移動させることができると考えられる。

・H_nとa_nの差は、円盤の枚数が増えていくにつれ、大きくなっていくと考えられる。

・円盤の枚数が十分に大きいとき、柱の本数が増えるほど最小手数は減ると考えられる。

・柱の本数が増えても、柱が3本のときの漸化式の立て方と同様に漸化式を立てることができると考えられる。

９．展望

・柱の本数を5本、6本…と増やしたとき、最小手数に規則性がみられるか検証する。

・柱の本数を一般化して最小手数についての式を立てる。

１０．謝辞

研究や論文作成にあたり、アドバイスをくださった数学科の先生方、ありがとうございました。

１１．参考文献

岡部恒治ほか．改訂版 高等学校 数学B．数研版株式会社，2020，168p.，

チャート研究所 改訂版 チャート式 基礎からの数学Ⅱ＋B．数研出版株式会社，2017，687.，

独立行政法人国立高等専門学校機構津山工業高等専門学校．“チャレンジゼミナール基礎の話題（数学）”．津山工業高等専門学校．www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/FreeRsearch/TowerHanoi.pdf ，（参照 2020-12-16）．

千葉県立船橋高等学校理数科3年坂口慶多.

ハノイの塔の柱をx本にして最小手順を求める. https://www.chiba-c.ed.jp/funako/fttp_kousin/ssh/reserch/2017/2017_25m3.pdf (参照2021-06-17)