22011

ハノイの塔

2640 吉村駿希　2641 吉村悠平　2524 西尾愛菜

要旨

ハノイの塔において柱 3 本、円盤n枚のときの最小手数は知られている。本研究では、柱の本数を増やしたときの最小手数の変化を調べた。柱を 4 本にしたとき、円盤の枚数を変化させて最小手数を実際に数えた。その値から規則性を予測して最小手数を算出した。続いて、柱が 3 本の場合の証明にならって柱が 4 本の場合の漸化式を立てて検討した。それらから、柱 4 本では 3 本と比べ最小手数が格段に減ることが分かった。

１．目的

ハノイの塔の柱の本数を増やしたとき、最小手数がどのように変化するのかを調べる。

２．ハノイの塔について

ハノイの塔とは、フランスの数学者リュカ(1842–91)が考案した次のようなパズルである。

○使うもの

・中央に穴が開いた大きさの違う円盤(n枚)

・3 本の柱(円盤がはまるようになっている)

○目的

・3 本の柱のうち 1 本にn枚の円盤が下から大きい順にはまっている。

・柱にはまった円盤をルールに従って全て別の柱に移動させる。

ルール

・1 回につき 1 枚の円盤を移動させる。

・円盤の上には、それよりも大きな円盤を乗せることはできない。

・円盤は柱以外の場所に置いてはいけない。

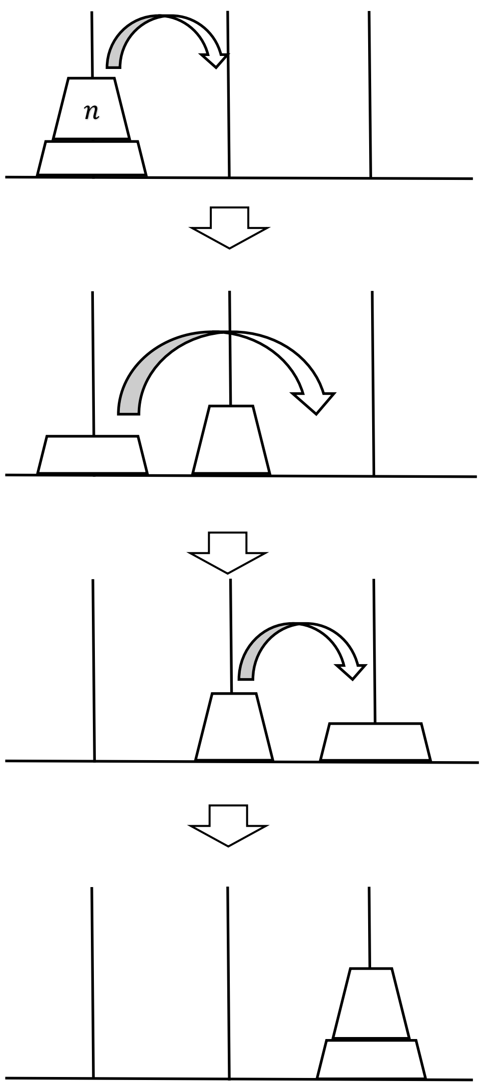
３．柱が 3 本のハノイの塔

円盤の枚数がn枚のときの最小手数をa_nとする。(n+1) 枚のとき、円盤は次のような手順で動かすことになる。(図 1 参照)

(i) n枚を 3 本の柱を使い、移動させる。

(ii) 残りの 1 枚をあいている柱に移動させる。

(iii) n枚を 3 本の柱を使い、(ii)で移動させた 1 枚の上に移動させる。



(図 1)柱が 3 本のハノイの塔の円盤の動かし方

図 1 より、最小手数をa_nとして漸化式を立てると、$a_{n+1} = 2a_n + 1$ となり、これを解くことで$a_n = 2^n - 1$ を導くことができる。

４．仮説

・円盤の枚数が同じならば、柱の本数を増やすと手数が少なくなる。

・柱が 3 本である場合と比べて、柱を 4 本にすると半分ほどの手数になる。

・柱が 3 本のハノイの塔の漸化式を参考にして、柱が 4 本の場合についての漸化式を立てることができる。

５．研究の手順

I. 柱を 4 本にしたハノイの塔のモデルを用いて実際に最小手数を数える。

→そこから規則性を見出し、式を立てる。

II. 柱が 3 本のハノイの塔の漸化式を参考にして、柱が 4 本の場合についての漸化式を立てる。

→柱が 3 本の場合と柱が 4 本の場合の最小手数を比較し、仮説の検証を行う。

６．結果

I. 柱が 4 本のハノイの塔の最小手数をH_nとし、表にまとめると表 1 のようになった。

(表 1)柱が 4 本のハノイの塔の最小手数

n		1	2	3	4	5	6	7	8	9
H_n		1	3	5	9	13	17	25	33	41
差	1	2	2	4	4	4	8	8	8	

規則性を見つけ出すために、$H_0 = 0$として階差をとった。ここで求められた階差を群数列とみなして式を立てる。

1 ｜ 2, 2 ｜ 4, 4, 4 ｜ 8, 8, 8, 8 ｜…

この群数列にみられる規則性は以下の通りであると予想した。

① 第k群にはk個の項が入る。

② 第k群の項の数はすべて2^{k-1}である。

ここで、$n = \frac{1}{2}k(k-1) + l\ (1 \leq l \leq k)$と表す。これを満たす整数$k, l$はただ 1 組存在する。

まず、$(k-1)$群までの和を考える。$(k-1)$群までの和をSとすると、

$$S = \sum_{p=1}^{k-1} p \cdot 2^{p-1}$$

である。これより、

$$\begin{array}{rl} S &= 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + (k-1) \cdot 2^{k-2} \\ -)\ 2S &= 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (k-1) \cdot 2^{k-1} \\ \hline -S &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k-2} - (k-1) \cdot 2^{k-1} \end{array}$$

$$= \frac{1 \cdot (2^{k-1} - 1)}{2-1} - (k-1) \cdot 2^{k-1}$$

よって

$$\begin{aligned} S &= (k-1) \cdot 2^{k-1} - (2^{k-1} - 1) \\ &= (\mathrm{k} - 2) \cdot 2^{k-1} + 1 \end{aligned}$$

となる。

次に第k群の第l項までの和を考える。和をS'とすると、$S' = l \cdot 2^{k-1}$である。

最小手数は$S + S'$であるので、$n = \frac{1}{2}k(k-1) + l$である$k, l$に対して、

$$\begin{aligned} H_n &= S + S' \\ &= (\mathrm{k} - 2) \cdot 2^{k-1} + 1 + l \cdot 2^{k-1} \\ &= (k + l - 2) \cdot 2^{k-1} + 1 \end{aligned}$$

となる。

II. 4 本のハノイの塔の場合は次のような手順で円盤を動かすことになる。(図 2 参照)

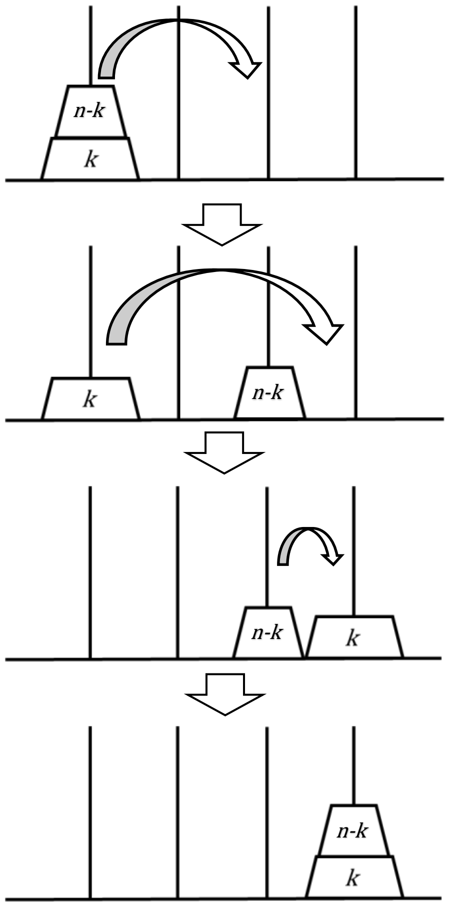
(i) n枚の円盤をk枚と$(n-k)$枚とに分ける。

(ii) $(n-k)$枚を、4 本の柱を使って移動させる。

(iii) k枚を 3 本の柱を使い移動させる。＊

(iv) $(n-k)$枚を 4 本の柱を使い、k枚の上に移動させる。

＊ k枚は(i)で移動させた円盤よりも大きいため、柱は残りの 3 本しか使うことができない。



(図 2)柱が 4 本のハノイの塔の円盤の動かし方

n枚の円盤をk枚と$(n-k)$枚とに分けたときの最小手数を$H(n,k)$とすると以下のような式で表すことができる。

$$H(n,k) = 2H_{n-k} + 2^k - 1$$

H_nはこの式から求められる値の最小値をとるので、

$$H_n = \min_{1 \le k \le n-1} H(n,k)$$

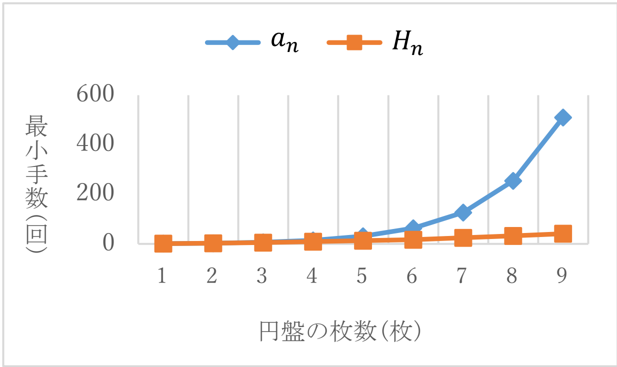
である。

表 2 は柱が 3 本のハノイの塔の最小手数(a_n)、I で立てた式から求められる値(H_n)、$H(n,k)$にkの値を順に代入した値をまとめたものである。

(表 2)I、II の式から計算した値

n	k	I	Hn	H(n,k) k=1	2	3	4	5	6	7	8	an
1	1	1	1	1								1
2	2	1	3	3	3							3
3	2	2	5	7	5	7						7
4	3	1	9	11	9	9	15					15
5	3	2	13	19	13	13	17	31				31
6	3	3	17	27	21	17	21	33	63			63
7	4	1	25	35	29	25	25	37	65	127		127
8	4	2	33	51	37	33	33	41	69	129	255	255
9	4	3	41	67	53	41	41	49	73	133	257	511
10	4	4	49	83	69	57	49	57	81	137	261	1023

柱が 3 本の場合と 4 本の場合の最小手数を比較する図を作成したところ、以下のようになった。



(図 3) a_nとH_nの最小手数の比較

図 3 より、柱の本数を 3 本から 4 本に増やすと、最小手数の大幅な減少が見られた。

7．考察

・ハノイの塔の柱を増やすほど、より少ない手数で円盤を移動させることができると考えられる。

・H_nとa_nの差は、円盤の枚数が増えていくにつれ、大きくなっていくと考えられる。

・柱の本数が増えても、柱が 3 本のときの漸化式の立て方と大きな差異はなく、同様に漸化式を立てることができると考えられる。

・II で立てた漸化式で、最小手数をとるkには規則性があると考えられる。

・I、II の式から計算した値は一致した。このことから II の漸化式を解くことで I の式を導くことができると考えられる。

8．展望

・実測した値の階差をとり、規則性を予想した群数列が正しく、立式に使ってよいものであったのかを証明を通して確認する。

・柱の本数を変数としたときの最小手数についての式を立てる。

９．謝辞

研究や論文作成にあたり、アドバイスをくださった数学科の先生方、ありがとうございました。

１０．参考文献

岡部恒治ほか. 改訂版 高等学校 数学B. 数研出版株式会社, 2020, 168p.

チャート研究所 改訂版 チャート式 基礎からの数学Ⅱ＋B. 数研出版株式会社, 2017, 687p.

独立行政法人国立高等専門学校機構津山工業高等専門学校. “チャレンジゼミナール基礎の話題(数学)”. 津山工業高等専門学校. www.tsuyama-ct.ac.jp/matsuda/FreeRsearch/TowerHanoi.pdf , (参照 2020-12-16).