

# 砂山の高さを決めているものは何か

3616 下畑 文乃    3614 近藤 里奈    3639 山本 志保

## 要旨

砂山遊びをする時、ある高さまでいくと自然と粒が転がり始め、崩れてしまう。そこで砂山の高さは何をもとにして決まるのか、また、どうしたら高い砂山を作ることができるのか、疑問に思ったので研究を行った。底面の形状と粒子を変えて、砂山を作成した。砂山の高さを決めているものは底面の半径と粒の大きさであることが分かった。今後は実際の砂粒を使用して実験を行っていく。

## 1. 目的

砂山の高さを決めている条件を知り、砂山の高さの限度には何か規則性があるか明らかにする。そして、高い砂山を作りたい。今回は砂粒以外の粒子を用いたが、便宜上砂山と呼ぶ。

## 2. 実験 1

### (1) 目的

砂山の高さと底面積にはどのような関係があるかを知る。

### (2) 仮説

砂山の高さは底面積の大きさによって決まる。

### (3) 使用した器具、材料 (図 1)

- ・食塩 (砂の代用) (図 2)
- ・画用紙 (円形、直径 2.00~6.00 cm)
- ・脚のついている金網      ・定規
- ・カメラ      ・スタンド      ・トレー

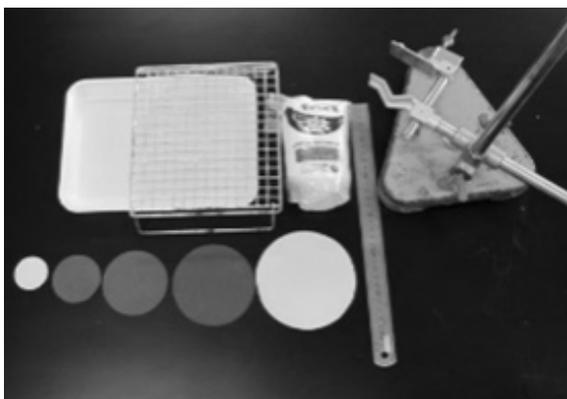


図 1 実験器具

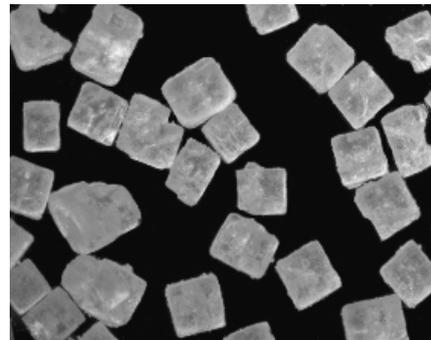


図 2 塩の粒

### (4) 実験方法

- ①図 1 に示した円形の画用紙の上に、底面の半径が 2.00cm~6.00cm の砂山を 5 種類作成した。ただし今回は粒の大きさが 4.0mm で均一である食塩 (図 2) を使用した。
- ②砂山は図 3 のように紙で筒を作り、円の中心上方から食塩を落として作成した。
- ③図 4 のようにスタンドで定規を固定して、砂山の高さを測定した。



図 3 砂山の作成

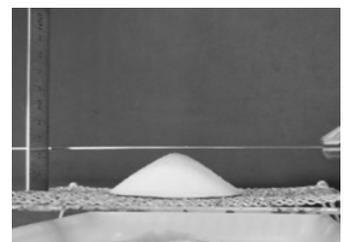


図 4 砂山の高さ測定

(5) 結果

表1 底面の半径・定面積と砂山の高さの関係

半径 (cm)	面積 (cm <sup>2</sup> )	砂山の高さ (cm)			
		1	2	3	平均
2.00	12.6	1.10	1.45	1.09	1.21
3.00	28.2	1.80	1.92	1.82	1.85
4.00	50.2	2.60	2.77	2.81	2.73
5.00	78.5	3.50	3.21	3.10	3.27
6.00	113.0	4.05	3.95	3.86	3.95

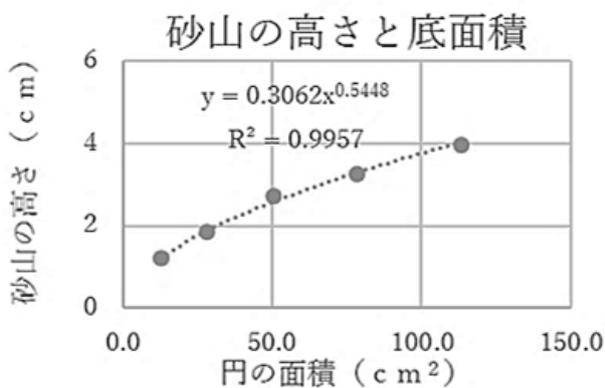


図5 砂山の高さや底面積の関係

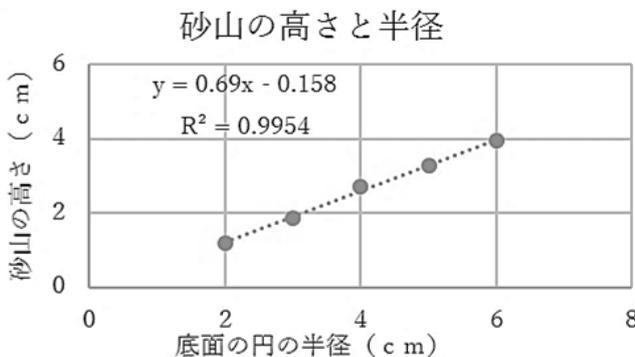


図6 砂山の高さや底面の半径の関係

(6) 考察

図5から砂山の高さや底面積の関係は比例関係にはないといえる。しかし図6から、砂山の高さが円の半径に比例していることが分かる。砂山の高さを決めているものは、底面の円の半径であり、図6のグラフの傾きから半径と高さの比を計算すると約0.69という値になった。

食塩による砂山は最大でこの傾斜になるような形となると考えられる。

3. 実験2

(1) 目的

底面を円でない形にした場合、砂山の高さはどうなるのかを知る。

(2) 仮説

多面体の内心から砂を落とした場合、内接する円の半径の大きさが等しければ、高さは同じになる。

(3) 使用した器具、材料

- ・方眼紙を、正三角形、正四角形、正五角形、正六角形で、すべての内接する円の大きさを3.00cmとしたもの(図7)
- ・脚のついている金網
- ・定規
- ・カメラ
- ・スタンド
- ・トレー

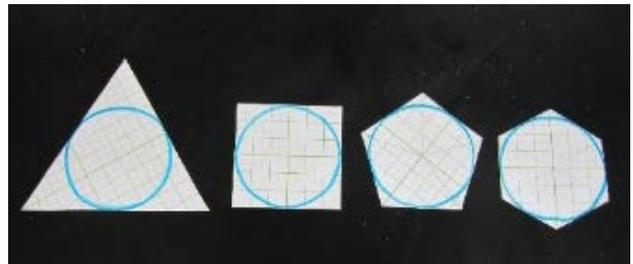


図7 様々な形の底面

(4) 実験方法

実験1と同様にして方眼紙を土台とした砂山を作成し、砂山の高さを測定した。

(5) 結果



図8 底面が正三角形の砂山



図9 底面が正方形の砂山



図10 底面が正五角形と正六角形の砂山

表2 底面の形と砂山の高さ

底面の形	砂山の高さ (cm)
円	2.30
正三角形	2.30
正四角形	2.31
正五角形	2.30
正六角形	2.34

表2の通り、内接する円の大きさが等しい5つの図形の砂山の高さはすべて約2.3cmになった。

また、砂のこぼれていく様子を観察すると、底面の辺の midpoint からこぼれていくことが観察できた。これは内接円と図形の辺とが接する点であった。

#### (6) 考察

砂山の高さは、底面の形に関係なく、内接する円の半径の大きさによって決まるといえる。

理由として次のことが考えられる。1つの山における傾斜はある値以上になると崩れるという仮説に則ると、この実験では砂を落とした点から底の端までの最短距離の方向で最も傾斜が大きくなる。

今回砂を落としたのは図形の中心であり、正多角形の内心に一致する点である。したがって、内接円の半径の長さが端までの最短距離であり、内接する円の半径の大きさによって砂山の高さが決まるといえる。実験1より、安定して粒をつめる傾斜の限界値は約0.69である。

#### 4. 実験3

様々の形の底面で砂山を作成し、尾根線のでき方を観察する。尾根線とは、頂上から見て、等高線が凸状に出っ張っている部分をつないだ線のことを言う。

##### (1) 目的

実験2で底面の形を変えると砂山の形も変わることを疑問に思い、尾根線には規則性があるのかを調べる。

##### (2) 仮説

内接円の接点の数だけ尾根線ができる。

##### (3) 使用した器具

- ・食塩 (砂の代用) ・方眼紙 (様々な形の土台)
- ・脚のついている金網      ・定規
- ・カメラ      ・スタンド      ・トレー

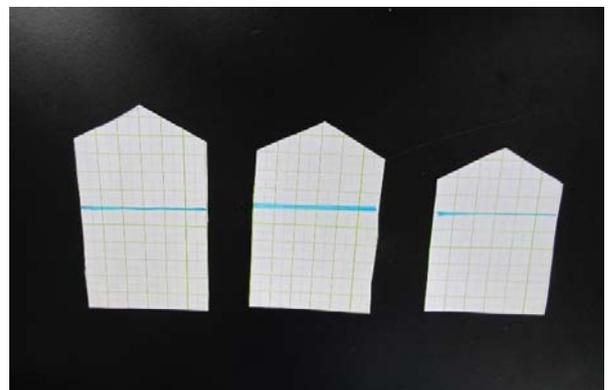


図11 正方形と正五角形を組み合わせた底面

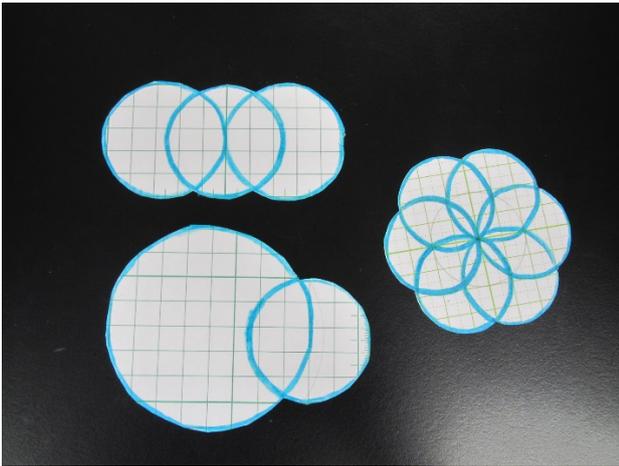


図 12 円をいくつか組み合わせた底面



図 14 円をいくつか組み合わせた底面①

#### (4) 実験方法

様々な形の底面で砂山を作成し、尾根線を観察する。

#### (5) 結果

正方形と正五角形を組み合わせた底面にしたとき尾根線の数は六本になった。図形同士が重なっている部分の最も高くなる部分をつないだ線がみられた。また、図形を重ねた部分の尾根線はみられなかった。

また、円をいくつか組み合わせた底面にしたとき尾根線は砂山の頂点を結んだ数だけみられた。



図 15 円をいくつか組み合わせた底面②



図 13 正方形と正五角形を組み合わせた底面



図 16 円をいくつか組み合わせた底面③

#### (6) 考察

尾根線の数は外接円との接点の数によって決まるといえる。またそれぞれの図形同士が重なり合う部分の尾根線はなくなり、それぞれの

図形の中心を結ぶ尾根線ができる。このことから、尾根線は凸状に出っ張っている部分をつないだ線であるといえる。

#### 4. 実験 4

半径 2.00~6.00 cm の円の砂山を測定し、横から撮影して印刷しそれぞれの角の角度を測る。測定した角度の番号は図 17 のとおりである。

今後、①の角を頂角、②、③の角を底角と呼称する。

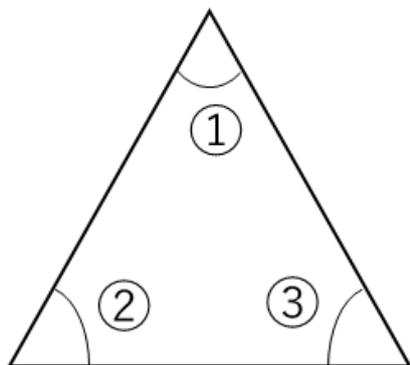


図 17 山と測定した角度の番

##### (1) 目的

砂山の底角や頂角に規則があるのかを調べ、高い砂山を作るためには何度が一番適当なのかを見つけ出す。

##### (2) 仮説

砂山の底角や頂角の値には規則性がある。

##### (3) 使用した器具、材料

- ・食塩（砂の代用）
- ・方眼紙（円形、直径 2.00~6.00cm）
- ・脚のついている金網      ・定規
- ・カメラ      ・スタンド      ・トレー
- ・分度器

##### (4) 実験方法

実験 1 と同様の手法で食塩を用いて高さが最大になる砂山を作成した。カメラを使用して砂山を山の頂点カメラが水平になる位置から

撮影し、写真を印刷する。その後、記録者三人がそれぞれ角度を測定する。

#### (5) 結果

表 3 底面の半径と砂山の角度の関係

		頂角 ① (°)			
半径 (cm)	1 回目	2 回目	3 回目	平均	
2.00	108	105	106	106	
3.00	110	110	110	110	
4.00	109	110	109	109	
5.00	111	110	111	111	
6.00	114	113	114	114	
		底角 ② (°)			
半径 (cm)	1 回目	2 回目	3 回目	平均	
2.00	37	36	36	36	
3.00	35	36	35	35	
4.00	36	35	35	35	
5.00	34	34	33	34	
6.00	33	33	33	33	
		底角 ③ (°)			
半径 (cm)	1 回目	2 回目	3 回目	平均	
2.00	33	38	37	37	
3.00	35	34	35	35	
4.00	36	36	35	36	
5.00	36	36	35	36	
6.00	33	34	33	33	

##### (6) 考察

表 3 より食塩で作る砂山の基本となる角の大きさの角①110°、角②35°、角③35°であるということを求めることができた。tan35° ≒ 0.700 より実験 1 の結果、考察と一致する。

## 5. 実験5

砂の粒の大きさが異なるコーンスターチ、食塩、ザラメを用意し砂山を作成する。

### (1) 目的

砂の粒の種類、大きさを変えた場合、砂山の高さがどのように変化するか調べる。

### (2) 仮説

食塩よりも粒の大きいザラメの方が低い砂山ができ、また食塩よりも粒の細かいコーンスターチが最も高い砂山になる。また、コーンスターチは粒が細かくサラサラしているため、高くとがった砂山の形になる。

### (3) 使用した器具、材料 (図1)

- ・食塩 (砂の代用) (図2)
- ・画用紙 (円形、直径 2.00~6.00 cm)
- ・脚のついている金網      ・定規
- ・カメラ      ・スタンド      ・トレー

### (4) 実験方法

実験1と同様にして、食塩、ザラメ、コーンスターチの砂山を作成し高さを測定する。

### (5) 結果

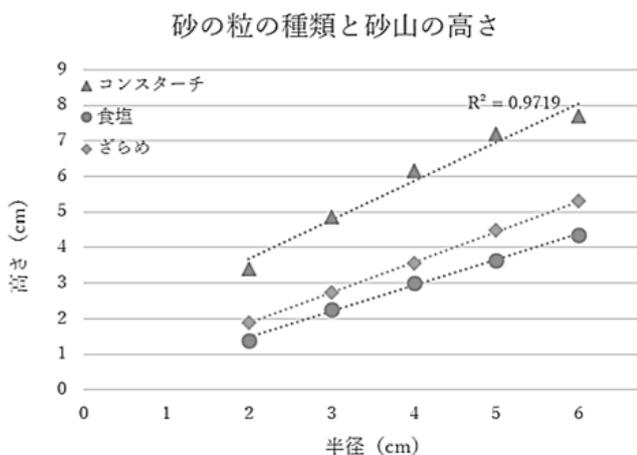


図18 砂の種類別の底面の半径と砂山の高さの関係

## (6) 考察

図18よりそれぞれの高さについてコーンスターチ、食塩、ザラメのどの粒でも半径が大きくなれば砂山の高さは高くなるといえる。コーンスターチは粒が小さくサラサラしているため底角が大きくななくても積みあがりやすいといえる。ザラメのほうが食塩よりも高く積みあがった理由については、ザラメは高く積みあがる際に粒が大きいため、粒同士がひっかかりやすいということが関係していると思われる。

## 6. 実験6

実験5で作成した食塩、コーンスターチ、ザラメの砂山の角度を測る。

### (1) 目的

砂の粒の種類、大きさを変えた場合、砂山の角度はどう変わるのかを調べる。

### (2) 仮説

食塩よりも粒の大きいザラメの方が角①が大きく緩やかな形になり、粒の小さいコーンスターチは角①の小さく尖った形になる。

### (3) 使用した器具、材料 (図1)

- ・食塩 (砂の代用)
- ・方眼紙 (円形、直径 2.00~6.00cm)
- ・脚のついている金網      ・定規
- ・カメラ      ・スタンド      ・トレー
- ・分度器

### (4) 実験方法

実験5と同様にして、食塩、ザラメ、コーンスターチの砂山を作成し、角①、角②、角③それぞれの角度を実験2と同様にして記録者三人が測定した。

(5) 結果

表4 底面の半径と砂山の頂角①の角度の関係

①				
コーンスターチ				
半径(cm)	1回目	2回目	3回目	平均
2	66	69	68	68
3	70	67	68	68
4	73	75	72	73
5	78	76	76	77
6	80	79	78	79
食塩				
半径(cm)	1回目	2回目	3回目	平均
2	110	110	108	109
3	114	119	110	114
4	109	108	107	108
5	110	108	110	109
6	111	110	110	110
ざらめ				
半径(cm)	1回目	2回目	3回目	平均
2	103	103	98	101
3	100	105	98	101
4	99	96	96	97
5	100	100	100	100
6	99	97	96	97

表5 底面の半径と砂山の頂角②の角度の関係

②				
コーンスターチ				
半径(cm)	1回目	2回目	3回目	平均
2	60	60	62	68
3	58	59	58	68
4	57	57	56	73
5	53	55	52	77
6	50	52	53	79
食塩				
半径(cm)	1回目	2回目	3回目	平均
2	32	33	34	33
3	32	29	38	33
4	37	36	36	36
5	36	36	36	36
6	34	36	36	35
ざらめ				
半径(cm)	1回目	2回目	3回目	平均
2	38	37	40	38
3	38	37	38	38
4	38	42	42	41
5	41	41	42	41
6	39	41	42	41

表6 底面の半径と砂山の頂角③の角度の関係

③				
コーンスターチ				
半径(cm)	1回目	2回目	3回目	平均
2	55	53	53	54
3	54	55	55	55
4	51	51	53	52
5	51	56	52	53
6	50	50	51	50
食塩				
半径(cm)	1回目	2回目	3回目	平均
2	38	37	36	37
3	33	34	34	34
4	35	36	36	36
5	35	36	35	35
6	34	35	35	35
ざらめ				
半径(cm)	1回目	2回目	3回目	平均
2	39	40	42	40
3	41	38	41	40
4	42	40	42	41
5	39	39	40	39
6	41	42	42	42

(6) 考察

表4, 5, 6より実験4で作成した食塩、コーンスターチ、ザラメの砂山の角度を底面の半径が2.00~6.00cmの時の平均を比べるとコーンスターチの頂角①は73°、食塩の頂角は110°、ザラメの頂角は99°となった。

このことより、ザラメが食塩に近い、頂角が広く安定した形になるといえる。コーンスターチは頂角が小さく尖った形をしているが、加えて底角②と底角③の値は異なっている。つまり底面が円であっても底角が異なるいびつな山ができていくといえる。このことはザラメや食塩にはない特徴のため、砂山の形状を決める別要因があるようにも思われる。

## 7. 結論

砂山の高さを決めている条件は、底面の半径であり、また砂山の高さは円の半径に比例していることが分かった。また、底面を円でない形にした時も砂山の高さは内接する円の半径の大きさによって決まることが分かった。

このことは粒の種類によって最大の傾斜角があり、それを越える高さに粒を載せると崩れていくことを示している。

## 8. 今後の展望

砂の粒の大きさを変えたとき、粒の大きさが小さいほど砂山の高さは高くなると思っていた。しかし、食塩よりも粒の大きなザラメの方が砂山の高さが高くなった。今後はこれらの理由を調べて、高い山を作りたい。

また、図形の中心以外から山を作成したときの山の傾斜の最大値を調べたい。

## 9. 参考文献

シゼコン自然科学コンクール SHIZECON.NET  
(<http://www.shizecon.net/>)