

生物の個体数の予測

3520 鈴木麻央 3608 加納稔也 3637 安江涼

要旨

数学を用いて生物の生息数を予測する方法を研究する。生物の生息数を予測するには、微分方程式を用いることができるとわかった。微分方程式には解が求められないものも存在するが数値を代入することで微分方程式の近似解を見つけることができる。数値代入法の1つであるルンゲクッタ法で、作った微分方程式が解けることを確かめた。

1. はじめに

未来を予測することに興味を持ち、数学を使って身近なことを予測することにした。予測をする方法のひとつである微分方程式を使って生物の個体数の変化を予測する。

2. 使用した器具・装置など

- ・ パーソナルコンピュータ
- ・ Excel2016

3. 研究・実験の手順

個体数の変化は $\frac{dN}{dt} = \epsilon N$ で表せる。

N …ある生物種の個体数

t …時間（年）

ϵ …単位時間当たりの自然増加率（/年）

例えば $N=100$ （匹）， $\epsilon=0.4$ のとき
1年後には $0.4 \times 100 = 40$ （匹）増加，
個体数は140匹になる。

もう一年経つと $0.4 \times 140 = 56$ （匹）増加，
個体数は196匹になる。

I) 立式する

II) 微分方程式 $\frac{dN}{dt} = \epsilon N$ を解く

IIでは微分方程式を解くことができたが、式として答えが出ない微分方程式もある。その場合は数値を代入してグラフを描かなければならない。その方法のひとつであるルンゲクッタ法を使うことにした。

———ルンゲクッタ法とは

- i) 初期値 $N(0)$ ，刻み幅の半分 $(\frac{h}{2})$ で計算し仮の $N(\frac{h}{2})$ を求め、傾き k_1 を出す。(図1)

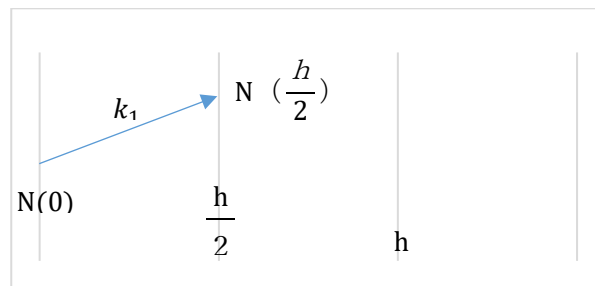


図 1

- ii) 初期値 $N(\frac{h}{2})$ ，刻み幅の半分で計算し傾き k_2 を出す。(図2)

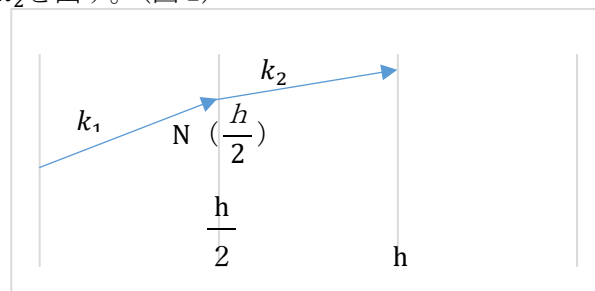


図 2

- iii) 初期値 $N(0)$ ，傾き k_2 として新たな $N(\frac{h}{2})$ を求める。その $N(\frac{h}{2})$ を用いて傾き k_3 を出す。(図3)

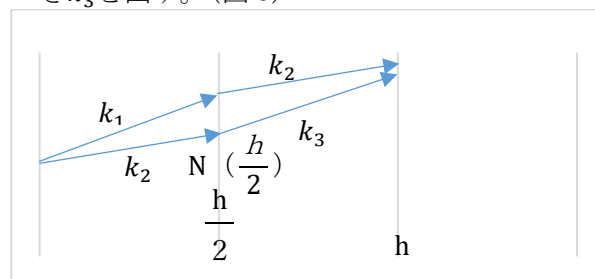


図 3

- iv) 初期値 $N(0)$ ，傾き k_3 として $N(h)$ を求める。その $N(h)$ を用いて傾き k_4 を求める。(図4)

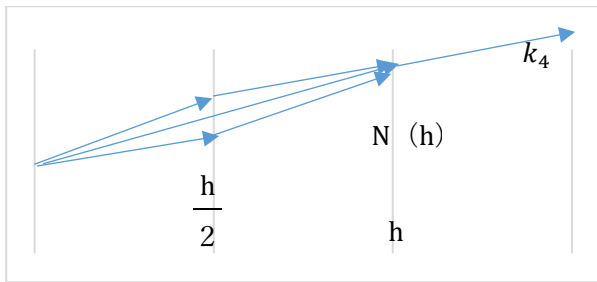


図 4

v) 最終的な傾き k を求める。

この手順で計算することによって、高い精度で数値を求めることができる。

Ⅲ) ルンゲクッタ法が使えることを検証する

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N \text{ をルンゲクッタ法を用いて解く}$$

$$f(t, N) = \varepsilon N \text{ とする}$$

ルンゲクッタ法のための計算くり返し用 VBA を作り、VBA をマクロとして登録する。

… (*)

マクロを実行し、解析結果をグラフにする。

(図 5)

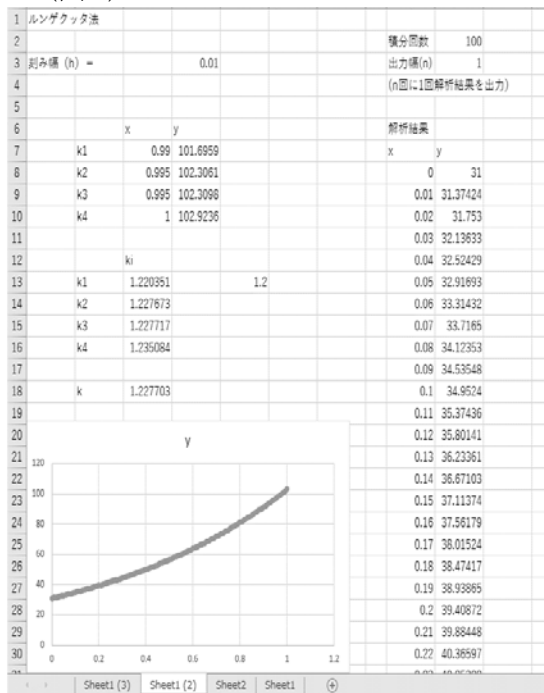


図 5 グラフと解析結果の例

t_0 が h 増加すると y_0 は k 増加する。
よって、 $(t_1, N_1) = (t_0 + h, N_0 + k)$ となる。
 k は下式で計算する。

$$\textcircled{1} \quad k_1 = h \cdot f(t_0, N_0)$$

$$\textcircled{2} \quad k_2 = h \cdot f\left(t_0 + \frac{h}{2}, N_0 + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$\textcircled{3} \quad k_3 = h \cdot f\left(t_0 + \frac{h}{2}, N_0 + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$\textcircled{4} \quad k_4 = h \cdot f(t_0 + h, N_0 + k_3)$$

$$\textcircled{5} \quad k = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

ここでは仮に

$N_0 = 31$ (万匹)

$\varepsilon = 1.2$ (/年) として計算する。

(*) 入力したマクロ

Sub rungekutta()

,

' ルンゲクッタ法

' マクロ記録日: 2017/10/31

,

Dim kaisuu As Integer ' 積分回数

Dim n As Integer ' 出力幅

Dim ii As Integer

kaisuu = Cells(2, 10)

n = Cells(3, 10)

h = Cells(3, 4)

col = 8

x0 = Cells(col, 9)

y0 = Cells(col, 10)

積分回数を入力するセル

出力幅を入力するセル

刻み幅を入力するセル

初期値を入力するセル

For i = 1 To kaisuu

Cells(7, 3) = x0

Cells(7, 4) = y0

xn = x0 + h

yn = y0 + Cells(18, 3)

ii = i Mod n

If ii = 0 Then

col = col + 1

Cells(col, 9) = xn

Cells(col, 10) = yn

End If

x0 = xn

y0 = yn

Next

Application.Goto Reference:="rungekutta"

ActiveWindow.SmallScroll Down:=-6

End Sub

IV) 実際のデータをもとに検証する

日本の天然記念物（講談社）の「伊豆諸島鳥島におけるアホウドリの増加」のグラフをもとにⅡの方法で検証した。上記の資料にはアホウドリの個体数は毎年約7%の割合で増加していると記述されていたので $\varepsilon=0.07$, $N_0=30$ （1955年の値）として、刻み幅1で計算した。

4. 結果

I) 立式

時間 t のときの個体数を N とすると、時間が Δt だけ経過したときの個体数の増加率は次の式で表せる。

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

$a(t)$ を個体数の増加率を一匹あたりに直したものとする。

$$a(t) = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t)\Delta t}$$

Δt 経過する間の増加率が一定の値 a だとすると、時間 Δt だけ経過した後の個体数は次の式で表せる。

$$N(t + \Delta t) = N(t) + aN(t)\Delta t = (1 + a\Delta t)N(t)$$

$t = 0$ のときの個体数を N_0 とすると、 Δt だけ時間が経過するごとの個体数は

$$\begin{aligned} N(\Delta t) &= (1 + a\Delta t)N_0 \\ N(2\Delta t) &= (1 + a\Delta t)N(t + \Delta t) = (1 + a\Delta t)^2 N_0 \\ N(3\Delta t) &= (1 + a\Delta t)N(t + 2\Delta t) = (1 + a\Delta t)^3 N_0 \end{aligned}$$

となり、時刻 $n\Delta t$ では

$$N(n\Delta t) = (1 + a\Delta t)^n N_0 \text{ となる。}$$

このとき

$$\log(1 + a\Delta t) = b \text{ とすると,}$$

$$1 + a\Delta t = e^b \text{ だから,}$$

$$N(n\Delta t) = e^{bn} N_0$$

個体数は、ある区切られた区間で変化するわけではないので増加率 $a(t)$ の代わりに、 $\Delta t \rightarrow 0$ としたときの極限、瞬間の変化率を考える、それを ε とする。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{N(t)\Delta t} \\ &= \frac{1}{N(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{N(t)} \frac{dN}{dt} \\ \text{つまり} \quad \frac{dN}{dt} &= \varepsilon N \end{aligned}$$

Ⅱ) $\frac{dN}{dt} = \varepsilon N$ を解く

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N$$

$$\frac{1}{N} \cdot dN = \varepsilon dt$$

両辺を積分

$$\log|N| = \varepsilon t + c_1$$

$$|N| = e^{\varepsilon t + c_1}$$

$$|N| = e^{\varepsilon t} \cdot e^{c_1}$$

$\pm e^{c_1}$ を C とする。

$$N = e^{\varepsilon t} \cdot C$$

$$N = C \cdot e^{\varepsilon t}$$

$t=0$ $N = N_0$ を代入する。

$$N_0 = C \cdot e^{\varepsilon \cdot 0}$$

$$N_0 = C \cdot 1$$

$$C = N_0$$

$$N = N_0 e^{\varepsilon t}$$

$t \rightarrow \infty$ での個体数は ε の符号により変わる。

i) $\varepsilon < 0$ のとき $N \rightarrow 0$ 絶滅

ii) $\varepsilon = 0$ のとき N_0 のまま変化しない

iii) $\varepsilon > 0$ のとき $N \rightarrow \infty$ 無限に増加する

ただし、生物が生きられる環境には限界があり、iii)のときは無限に増加するわけではない。

また、 $N = N_0 e^{\varepsilon t}$ のグラフは図6のようになった。

Ⅲ) ルンゲクッタ法が使えることを検証する
グラフは図7のようになった。

IV) 実際のデータをもとに検証する

計算の結果は図8, 9のようになった。

日本の天然記念物（講談社）にはアホウドリの推定総数は600~650羽（1993~1994年）と書かれていたがマクロの実行結果は1993年が429匹、1994年が460匹となった。10年で個体数が約2倍になるという記述とは一致した。

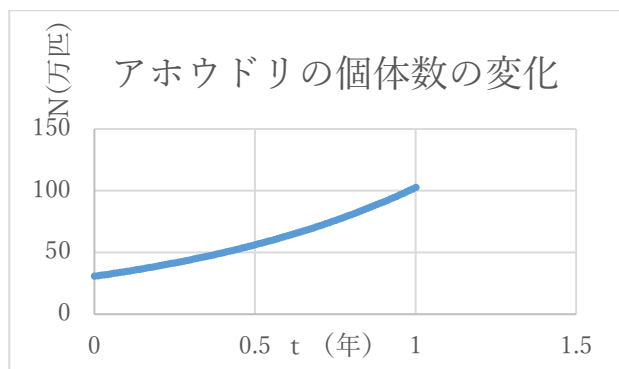


図6 $N = N_0 e^{\epsilon t}$ のグラフ

0	31	0.26	42.3508	0.51	57.16759	0.76	77.16818
0.01	31.37424	0.27	42.86207	0.52	57.85774	0.77	78.09978
0.02	31.753	0.28	43.37951	0.53	58.55621	0.78	79.04262
0.03	32.13633	0.29	43.9032	0.54	59.26312	0.79	79.99685
0.04	32.52429	0.3	44.43321	0.55	59.97856	0.8	80.96259
0.05	32.91693	0.31	44.96962	0.56	60.70264	0.81	81.93999
0.06	33.31432	0.32	45.51251	0.57	61.43546	0.82	82.9292
0.07	33.7165	0.33	46.06195	0.58	62.17713	0.83	83.93034
0.08	34.12353	0.34	46.61802	0.59	62.92775	0.84	84.94357
0.09	34.53548	0.35	47.18081	0.6	63.68743	0.85	85.96904
0.1	34.9524	0.36	47.75039	0.61	64.45628	0.86	87.00688
0.11	35.37436	0.37	48.32685	0.62	65.23442	0.87	88.05725
0.12	35.80141	0.38	48.91026	0.63	66.02195	0.88	89.12031
0.13	36.23361	0.39	49.50072	0.64	66.81898	0.89	90.19619
0.14	36.67103	0.4	50.09831	0.65	67.62564	0.9	91.28507
0.15	37.11374	0.41	50.70311	0.66	68.44204	0.91	92.38709
0.16	37.56179	0.42	51.31521	0.67	69.26829	0.92	93.50241
0.17	38.01524	0.43	51.9347	0.68	70.10452	0.93	94.6312
0.18	38.47417	0.44	52.56167	0.69	70.95084	0.94	95.77361
0.19	38.93865	0.45	53.19621	0.7	71.80738	0.95	96.92982
0.2	39.40872	0.46	53.83841	0.71	72.67426	0.96	98.09998
0.21	39.88448	0.47	54.48837	0.72	73.5516	0.97	99.28428
0.22	40.36597	0.48	55.14616	0.73	74.43954	0.98	100.4829
0.23	40.85328	0.49	55.81191	0.74	75.33819	0.99	101.6959
0.24	41.34648	0.5	56.48568	0.75	76.2477	1	102.9236
0.25	41.84562						

図7 $N = N_0 e^{\epsilon t}$ のグラフの計算結果

$N = N_0 e^{\epsilon t}$ に
 $N_0 = 31$ $\epsilon = 1.2$ を代入

いくつか数値を挙げると

t (年)	N (匹)
0.1	34.95
0.2	39.41
0.3	44.43
0.4	50.10
0.5	56.49
0.6	63.69
0.7	71.81
0.8	80.96
0.9	91.29
1.0	102.92

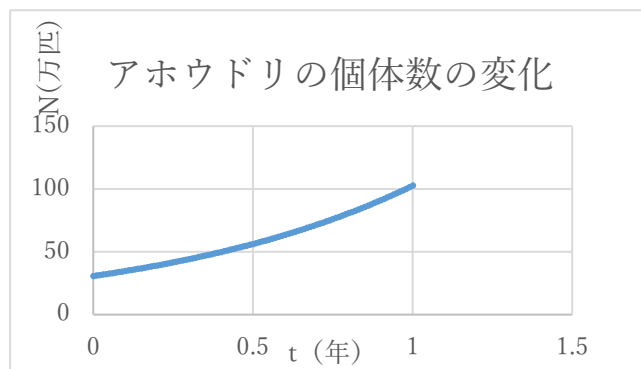


図8 ルンゲクッタ法を用いたグラフ

0	31	0.26	42.3508	0.51	57.16759	0.76	77.16818
0.01	31.37424	0.27	42.86207	0.52	57.85774	0.77	78.09978
0.02	31.753	0.28	43.37951	0.53	58.55621	0.78	79.04262
0.03	32.13633	0.29	43.9032	0.54	59.26312	0.79	79.99685
0.04	32.52429	0.3	44.43321	0.55	59.97856	0.8	80.96259
0.05	32.91693	0.31	44.96962	0.56	60.70264	0.81	81.93999
0.06	33.31432	0.32	45.51251	0.57	61.43546	0.82	82.9292
0.07	33.7165	0.33	46.06195	0.58	62.17713	0.83	83.93034
0.08	34.12353	0.34	46.61802	0.59	62.92775	0.84	84.94357
0.09	34.53548	0.35	47.18081	0.6	63.68743	0.85	85.96904
0.1	34.9524	0.36	47.75039	0.61	64.45628	0.86	87.00688
0.11	35.37436	0.37	48.32685	0.62	65.23442	0.87	88.05725
0.12	35.80141	0.38	48.91026	0.63	66.02195	0.88	89.12031
0.13	36.23361	0.39	49.50072	0.64	66.81898	0.89	90.19619
0.14	36.67103	0.4	50.09831	0.65	67.62564	0.9	91.28507
0.15	37.11374	0.41	50.70311	0.66	68.44204	0.91	92.38709
0.16	37.56179	0.42	51.31521	0.67	69.26829	0.92	93.50241
0.17	38.01524	0.43	51.9347	0.68	70.10452	0.93	94.6312
0.18	38.47417	0.44	52.56167	0.69	70.95084	0.94	95.77361
0.19	38.93865	0.45	53.19621	0.7	71.80738	0.95	96.92982
0.2	39.40872	0.46	53.83841	0.71	72.67426	0.96	98.09998
0.21	39.88448	0.47	54.48837	0.72	73.5516	0.97	99.28428
0.22	40.36597	0.48	55.14616	0.73	74.43954	0.98	100.4829
0.23	40.85328	0.49	55.81191	0.74	75.33819	0.99	101.6959
0.24	41.34648	0.5	56.48568	0.75	76.2477	1	102.9236
0.25	41.84562						

図9 ルンゲクッタ法を用いたグラフの計算結果

$N_0 = 31$, $\epsilon = 1.2$
 刻み幅 0.01, 出力幅 1 として計算

同様に数値を挙げると

t (年)	N (匹)
0.1	34.95
0.2	39.41
0.3	44.43
0.4	50.10
0.5	56.49
0.6	63.69
0.7	71.81
0.8	80.96
0.9	91.29
1.0	102.92

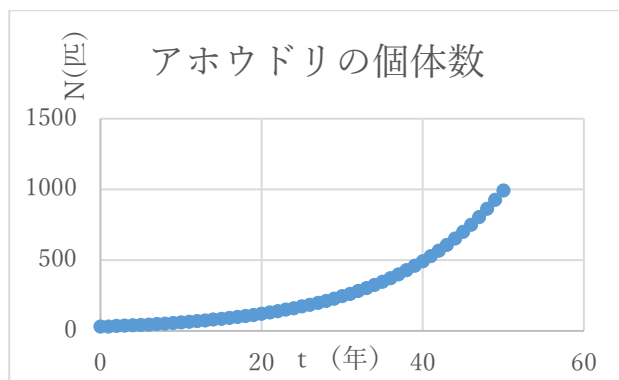


図 10 アホウドリの個体数のグラフ

t	N				
0	30	23	150.0843	46	750.8431
1	32.17525	24	160.9666	47	805.2854
2	34.50821	25	172.638	48	863.6752
3	37.01034	26	185.1557	49	926.2987
4	39.69389	27	198.581	50	993.4629
5	42.57202	28	212.9797	51	1065.497
6	45.65884	29	228.4225	52	1142.754
7	48.96948	30	244.985	53	1225.613
8	52.52017	31	262.7484	54	1314.48
9	56.32831	32	281.7998	55	1409.791
10	60.41257	33	302.2326	56	1512.012
11	64.79298	34	324.1469	57	1621.645
12	69.491	35	347.6502	58	1739.228
13	74.52966	36	372.8577	59	1865.336
14	79.93367	37	399.893	60	2000.588
15	85.72952	38	428.8885	61	2145.647
16	91.94561	39	459.9864	62	2301.224
17	98.61241	40	493.3391	63	2468.082
18	105.7626	41	529.1103	64	2647.038
19	113.4313	42	567.4751	65	2838.97
20	121.656	43	608.6217	66	3044.818
21	130.477	44	652.7517	67	3265.593
22	139.9377	45	700.0815		

図 11 アホウドリの個体数の計算結果

$N_0 = 30$, $\varepsilon = 0.07$

刻み幅 0.01, 出力幅 1 として計算

$t=0$ は 1955 年

$t=38$ が 1993 年

$t=39$ が 1994 年

10 年ごとの個体数を比べると

t (年)	N (匹)	10 年ごとの比
0	30	—
10	60	2.00 倍
20	122	2.03 倍
30	245	2.01 倍
40	493	2.01 倍
50	993	2.01 倍
60	2001	2.02

5. 考察

図 7 と図 9 を比べてみると、ルンゲクッタ法で描いたグラフは、実際に微分方程式を解いて得た方程式のグラフと等しいことが分かる。

よって、この微分方程式はルンゲクッタ法で解くことができるということが分かった。

ルンゲクッタ法を使うことで生物の生息数が予測できることが分かった。

IV で本の数値と計算した数値が異なっていた理由は二つ考えられる。

(1) 初期値が誤っていた

グラフから初期値を読み取ったためその際に若干の誤差が発生した可能性がある。再び参考文献を読み直してみると、 $t=0$ は 1951 年であることが判明した。 $t=0$ が 1951 年の時、1993 年は $t=42$ 、1994 年は $t=43$ である。 $t=42$ の時 $N = 567$ 、 $t=43$ の時 $N = 609$ なので、600～650 羽という記述に近づいた。

実際に初期値の数字を変化させて計算してみると図 12 のようになった。

N_0	30	31	32	33	34
N (1993 年)	567	586	605	624	643

図 12 初期値による変化

(2) 実際には個体数の増加を促進したり妨害したりする作用が働いた 具体的には以下の要因が考えられる。

〈増加を妨害〉

- ・ 気候などの環境要因
- ・ 餌の取り合いなどの競争
- ・ 個体の流出
- ・ 餌となる動物の減少
- ・ 捕食される動物の増加
- ・ 外来種による生態系の変化
- ・ 生息環境の変化 等

〈増加を促進〉

- ・ 気候などの環境要因
- ・ 個体の流入
- ・ 餌となる動物の増加
- ・ 外来種による生態系の変化
- ・ 捕食される動物の減少 等

(1)の結果、図 12 から初期値が 1 変化するだけでその後の個体数は大きく変化することが分かる。

(2)の考察を踏まえて調べた結果以下のことが分かった。

- ・ 鳥島で、絶滅したと思われたアホウドリが再発見されてから、鳥島測候所がアホウドリの保護を行った。
- ・ 1965 年、鳥島測候所が引き上げることになりアホウドリの保護は止まった。
- ・ 1980 年代から再び保護活動が始まった。
- ・ 1965 年までの保護活動の内容は、営巣環境の整備、野生化していたイエネコの駆除など。
- ・ 1980 年代以降の保護では、営巣環境の整備に加えて、防砂工事が行われた。防砂工事の行われた年に個体数は増加したが、数年後には土壌は元に戻ってしまった。
- ・ その後 2005 年には 1700 匹まで増加した。

これらのことから、増加率が一定ではなかったために個体数の予測に誤差が発生したと考えられる。また、図 11 で 2005 年は $t=54$ であるがその時 $N=1315$ であり大きく差が開いた。

6. 今後の展望

II の結果で書いた通り $\varepsilon > 0$ のとき個体数は無限に増えるわけではないので、正確な予測をできるようにする。K を環境収容力とすると、 $\frac{dN}{dt} = \varepsilon N \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ で表せることが分かった。

$N = K$ の時、 $\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0$ なので $\frac{dN}{dt} = 0$ になり、個体数の増加が止まる。

例えば 2000 匹までしか生息できない環境 ($K=2000$) で、 $N = 1000$ 、 $\varepsilon = 0.4$ と仮定する。

1 年後には、

$0.4 \times 1000 \times \left(1 - \frac{1000}{2000}\right) = 200$ (匹) 増加し 1200 匹になる。

さらに 1 年後には、

$0.4 \times 1200 \times \left(1 - \frac{1200}{2000}\right) = 192$ (匹) 増加し 1392 匹になる。

このように、 $\frac{dN}{dt} = \varepsilon N \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ では、生息数が限界数 (K) に近づくと増加が抑制される。

この式を使うことでより現実に即した予測をすることが可能になると思われる。また、環境保護によって大きく個体数が大きくなることが分かったので、外的要因による影響を加味して個体数の予測をしていきたい。

7. 参考文献・引用文献

- ・ チャート式基礎からの数学 II+B (数研出版)
- ・ Focus Z 数学 II+B (啓林館)
- ・ Focus Gold 数学 III (啓林館)
- ・ エディノート 数学 III (啓林館)
- ・ 高等学校数学 III (数研出版)
- ・ 日本の天然記念物 (講談社)
- ・ 環境基礎数学演習 2009
(http://web.agr.ehime-u.ac.jp/~kishou/Lecture/math2s/part1/C_hap1_T.pdf)
- ・ エクセルを用いたルンゲクッタ法による微分方程式の計算
(<http://godfoot.world.coocan.jp/rungekutta.htm>)
- ・ Euler 法-[物理のかぎしっぽ]
(<http://hooktail.org/computer/index.php?Euler%CB%A1>)
- ・ Runge-Kutta 法-[物理のかぎしっぽ]
(<http://hooktail.org/computer/index.php?Runge-Kutta%CB%A1>)
- ・ 5 章 微分方程式
(<http://www.math.s.chibau.ac.jp/~yasuda/Chiba/Lec/kb2009-5.pdf>)
- ・ 生きものの数学
(<http://www.b.s.osakafu-u.ac.jp/~tnamba/HokusetsuSanda2004.pdf>)
- ・ 日本の人口をシミュレートしてみる
(http://hidekih.cocolog-nifty.com/Move_Data/Japan_Population_Simulation_090327.pdf)

謝辞

この研究を進めるにあたり琉球大学理学部の久保田康裕教授には個体数の解析手順についてご指導いただきました。この場を借りて感謝申し上げます。