31801

ベイズ統計学によるポーカーの必勝法

3505　大野敦士　　3533　三上奈桜　　3604　井端千尋

要旨

ベイズ統計学を用いて，ポーカーに勝ったとき，1回前にどのような操作をしていたのか確率を求めながら，勝つための最善の手(必勝法と呼ぶ)を導出した。通常のポーカーのルールを用いると確率導出が複雑になると考え，ルールを単純化した「単純ポーカー」の必勝法を求めた。その後,「単純ポーカー4枚 ver.」にルールを拡張した。その結果,「単純ポーカー4枚 ver.」では，ノーペアのときは3枚，ワンペアのときは交換パターン1で1枚，スリーカードのときは交換パターン2で1枚交換し，ツーペア，フォーカードのときは交換しないことが必勝法であると結論づけた。

1. 目的

数学を用いて日常的な課題を解決したいと考え，ベイズ統計学を用いてポーカーに勝ったとき，どのような操作をしていたのか原因の確率を求め，確率的にポーカーの必勝法を導出することを目的とした。

2. 定義とルール

本研究における「必勝法」とは，自分が持っているカードの役に対して，勝利のため確率的に最善と考えられる操作(カードの交換をすること)を行うことと定義する。また，ポーカーにはいくつかのルールがあるが，この研究ではドローポーカーの必勝法について求める。

ドローポーカーとは，以下のようなルールで行うトランプのゲームである。

まず，参加者全員にカードを5枚ずつ配る。カードの組み合わせにより，同じ数字のカードが1組のワンペア，同じ数字のカードが3枚のスリーカード等の役がある。カードが配られた後，参加者はより強い役をつくることを目的にして，任意の枚数手札を交換する。その後，ほかの参加者とカードを見せ合い，最も強い役を持っていた人が勝利となる。

3. 使用した道具・ソフト

・パーソナルコンピューター

・Excel2016

4. 方法

(1)ベイズ統計学について学ぶ

(2)確率的にポーカーの必勝法を求める

(3)必勝法の検証を行う

5. 手順

(1)ベイズ統計学について学ぶ

ベイズ統計学のもととなるベイズの定理(④)は以下のように証明される。

〈証明〉

確率の乗法定理より

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad \cdots ①$$

また，同様に

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \quad \cdots ②$$

①，②より

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \quad \cdots ③$$

$P(B) \neq 0$として，

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} \quad \cdots ④$$

(終)

実際にベイズの定理を使うときには，④をより一般化させたベイズの展開公式(⑤)を用いる。

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k)} \quad \cdots ⑤$$

⑤について証明する。

〈証明〉
④は，図 1 の着色部の確率を求めている。

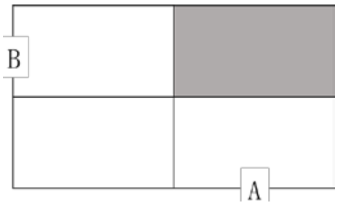

図 1　④が求めている部分

ここで，複数の事象 A が起こることを考えると，図 1 は図 2 のように変形できる。

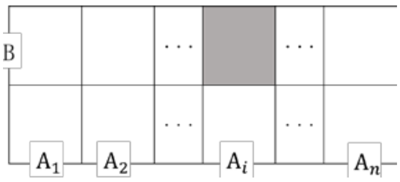

図 2　複数の事象 A が起こるとき

このとき，④の分母について，図 2 より，

$$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}P(B|A_k)\cdot P(A_k) \quad \cdots⑥$$

⑤の分子について，求める着色部は$P(Ai\cap B)$なので，確率の乗法定理より，

$$P(Ai\cap B)=P(Ai)\cdot P(B|Ai) \quad \cdots⑦$$

⑥，⑦は⑤の分母および分子に等しい。
ゆえに，⑤は成立。　(終)

ベイズ統計学の特徴のうち，
Ⅰ理由不十分の原則が使えること
Ⅱ結果からその原因が考察できること
という 2 点が，ポーカーの必勝法を求めるために最適だと考えた。

以上 2 点の特徴や，ポーカーの必勝法を求めるうえでの利用法について説明する。

理由不十分の原則は，確率分布が離散型一様分布になっていると仮定して，事前確率がわからないときには，それぞれの事象が起こる確率を等しく設定するという原則である。

また，結果から原因を考察することで，ポーカーに勝ったという結果が生じたときに，どのような操作をしていたかという原因を求められる。これを用いることで，必勝法が導出できる。

(2)確率的にポーカーの必勝法を求める

(A)「単純ポーカー」のルール設定

確率の導出の利便性から，ポーカーのルールを単純化した「単純ポーカー」についての必勝法をまずは求める。その後，一般的なポーカーに拡張する。

「単純ポーカー」のルールを以下のように定める。

・使用するカードはジョーカーを含まない 52 枚。
・最初に山札から引く枚数は 3 枚。
・手札を見て，任意の枚数交換する。ここで捨てたカードは再び戻ってこないものとする。
・役は，ノーペア(同数字のカードなし)，ワンペア(同数字のカード 2 枚)，スリーカード(同数字のカード 3 枚)とする。後に書いてあるものほど強いとし，相手よりも強い役を持っていれば勝ちとする。
・数字による強さは考えず，相手と自分の役が同じときは引き分けとする。
・自分と相手の使用する山札は異なるとする。
・相手は手札を交換しないものとする。

以上のルールをもとに，確率を導出する。ベイズの定理を用いて，結果から原因を考察するためには，原因があり結果が起こる確率が導出されていることが必要である。そのため，まずはその確率を導出する。

(B)「単純ポーカー」の確率導出

ポーカーを行ううえで，自分の最初の役については変えることは不可能である。そこで，「単純ポーカー」について，自分の最初の役によって
(ⅰ)自分の最初の役がノーペアのとき
(ⅱ)自分の最初の役がワンペアのとき
(ⅲ)自分の最初の役がスリーカードのとき

の3通りに場合分けし，確率を導出し，必勝法を考察する。

確率導出で用いる記号は，以下の通りとする。

A…自分の最初の役がノーペア
B…自分の最初の役がワンペア
C…自分の最初の役がスリーカード
a…自分の交換後の役がノーペア
b…自分の交換後の役がワンペア
c…自分の交換後の役がスリーカード
α…相手がノーペア　β…相手がワンペア
γ…相手がスリーカード
O…交換枚数0枚　Ⅰ…交換枚数1枚
Ⅱ…交換枚数2枚　Ⅲ…交換枚数3枚
1…交換パターン1　2…交換パターン2

確率導出においては一部で Excel を利用する。また，確率は小数で導出し，無限小数となった場合は，小数点以下5桁目を四捨五入し，小数点以下4桁の小数で表現する。

なお，場合分けに関わらない共通の確率は以下の表1の通り。

表1　共通の確率導出

	分子立式	分母立式	結果
P(A)	$1-\{P(B)+P(C)\}$		0.8282
P(B)	※1	${}_{52}C_3$	0.1694
P(C)	${}_{13}C_1 \times {}_4C_3$	${}_{52}C_3$	0.0024
P(α)	P(A)に同じ		0.8282
P(β)	P(B)に同じ		0.1964
P(γ)	P(C)に同じ		0.0024

※1 ${}_{13}C_1 \times {}_4C_2 \times {}_{48}C_1$

また，勝つ確率，すなわちP(W)は次のようになる。

$$P(W) = P(b \cap \alpha) + P(c \cap \alpha) + P(c \cap \beta) \quad \cdots ⑧$$

（ⅰ）自分の最初の役がノーペアのとき

確率については表2のようになる。

表2　ノーペア確率導出

	分子立式	分母立式	結果
P(O)	理由不十分の原則		0.2500
P(Ⅰ)	理由不十分の原則		0.2500
P(Ⅱ)	理由不十分の原則		0.2500
P(Ⅲ)	理由不十分の原則		0.2500
P(a|O)	1	1	1.0000
P(a|Ⅰ)	${}_{43}C_1$	${}_{49}C_1$	0.8776
P(a|Ⅱ)	※1	${}_{49}C_2$	0.1454
P(a|Ⅲ)	※2	${}_{49}C_3$	0.0149
P(b|O)	0	${}_{49}C_0$	0.0000
P(b|Ⅰ)	※3	${}_{49}C_1$	0.2449
P(b|Ⅱ)	※4	${}_{49}C_2$	0.1071
P(b|Ⅲ)	※5	${}_{49}C_3$	0.0129
P(c|O)	0	${}_{49}C_0$	0.0000
P(c|Ⅰ)	0	${}_{49}C_1$	0.0000
P(c|Ⅱ)	${}_3C_2 \times 3$	${}_{49}C_2$	0.0077
P(c|Ⅲ)	※6	${}_{49}C_3$	0.0027

※1 $3 \times ({}_{10}C_1 \times {}_4C_1) + {}_9C_1 \times {}_4C_1 + {}_3C_1 + {}_3C_1 \times {}_3C_1$

※2 ${}_{10}C_1 \times {}_4C_1 + {}_9C_1 \times {}_4C_1 + {}_8C_1 \times {}_4C_1 + {}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_2C_1 \times {}_3C_1 + {}_{10}C_1 \times {}_4C_1 + {}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_{10}C_1 \times {}_4C_1 + {}_9C_1 \times {}_4C_1$

※3 ${}_2C_1 \times {}_3C_1 \times 2$

※4 ${}_{10}C_1 \times {}_4C_2 + {}_3C_1 \times 48 + {}_3C_2 + {}_3C_2$

※5 ${}_{10}C_1 \times {}_4C_2 + {}_9C_1 \times {}_4C_1 + ({}_3C_2 + {}_{10}C_1 \times {}_4C_1) \times 3 + {}_3C_1 \times {}_3C_2 + {}_3C_1$

※6 ${}_{10}C_1 \times {}_4C_3 + {}_3C_1 \times {}_3C_3 \times 3$

このとき，⑧より，

$$P(W) = 0.0782 \quad \cdots ⑨$$

ベイズの定理より，

$$P(操作|W) = \frac{P(操作)P(W|操作)}{P(W)} \quad \cdots ⑩$$

$$P(W|操作) = P(操作)\{P(b|操作)P(\alpha) + P(c|操作)P(\alpha) + P(c|操作)P(\beta)\} \quad \cdots ⑪$$

※⑩，⑪における「操作」とは，カードの交換枚数のことを指す。

⑩，⑪より，

$P(O|W)=\frac{0}{0.0782}=0$　・・・⑫

$P(\mathrm{I}|W)=\frac{0.0507}{0.0782}=0.6483$　・・・⑬

$P(\mathrm{II}|W)=\frac{0.0241}{0.0782}=0.3082$　・・・⑭

$P(\mathrm{III}|W)=\frac{0.0034}{0.0782}=0.0435$　・・・⑮

(ⅱ)自分の最初の役がワンペアのとき

この場合分けにおいて「交換パターン 1」,「交換パターン 2」とは以下のような操作を指す。

例)1，1，2 がそろっているとき

交換枚数 1 枚のとき

交換パターン 1→1 を交換

交換パターン 2→2 を交換

交換枚数 2 枚のとき

交換パターン 1→1 と 2 を交換

交換パターン 2→1 と 1(1 を 2 枚)交換

確率については表 3 のようになる。

表 3　ワンペア確率導出

	分子立式	分母立式	結果
$P(O)$	理由不十分の原則		0.1667
$P(\mathrm{I}_1)$	理由不十分の原則		0.1667
$P(\mathrm{I}_2)$	理由不十分の原則		0.1667
$P(\mathrm{II}_1)$	理由不十分の原則		0.1667
$P(\mathrm{II}_2)$	理由不十分の原則		0.1667
$P(\mathrm{III})$	理由不十分の原則		0.1667
$P(a\|O)$	0	${}_{49}C_0$	0.0000
$P(a\|\mathrm{I}_1)$	${}_{44}C_1$	${}_{49}C_1$	0.8980
$P(a\|\mathrm{I}_2)$	0	${}_{49}C_0$	0.0000
$P(a\|\mathrm{II}_1)$	※1	${}_{49}C_2$	0.8801
$P(a\|\mathrm{II}_2)$	※2	${}_{49}C_2$	0.2619
$P(a\|\mathrm{III})$	$1-\{P(b\|\mathrm{III})+P(c\|\mathrm{III})\}$		0.8263
$P(b\|O)$	1	1	1.0000
$P(b\|\mathrm{I}_1)$	${}_2C_1+{}_3C_1$	${}_{49}C_1$	0.1020
$P(b\|\mathrm{I}_2)$	${}_{47}C_1$	${}_{49}C_1$	0.9592
$P(b\|\mathrm{II}_1)$	※3	${}_{49}C_2$	0.1386
$P(b\|\mathrm{II}_2)$	※4	${}_{49}C_2$	0.1743
$P(b\|\mathrm{III})$	※5	${}_{49}C_3$	0.1712
$P(c\|O)$	0	${}_{49}C_0$	0.0000
$P(c\|\mathrm{I}_1)$	0	${}_{49}C_1$	0.0000
$P(c\|\mathrm{I}_2)$	${}_2C_1$	${}_{49}C_1$	0.0408
$P(c\|\mathrm{II}_1)$	${}_2C_2$	${}_{49}C_2$	0.0009
$P(c\|\mathrm{II}_2)$	${}_3C_2$	${}_{49}C_2$	0.0026
$P(c\|\mathrm{III})$	※6	${}_{49}C_3$	0.0024

※1 $\frac{1}{2}\times({}_{44}C_1\times{}_{40}C_1+{}_{46}C_1\times{}_{42}C_1)$

※2 ${}_2C_1\times{}_{44}C_1+{}_{11}C_2\times{}_4C_1$

※3 ${}_2C_1\times{}_{47}C_1+{}_3C_2+{}_4C_2\times{}_{11}C_1$

※4 ${}_3C_1\times{}_{46}C_1+{}_2C_2+{}_{11}C_1\times{}_4C_2$

※5 ${}_2C_2\times{}_{47}C_1+{}_3C_2\times{}_{46}C_1+{}_{11}C_1+{}_4C_2\times{}_{45}C_1$

※6 ${}_3C_3+11\times{}_4C_3$

このとき，⑧より，

$P(W)=0.3631$　・・・⑯

よって，⑩，⑪より，

$P(O|W)=\frac{0.1381}{0.3631}=0.3803$　・・・⑰

$P(\mathrm{I}_1|W)=\frac{0.0141}{0.3631}=0.0388$　・・・⑱

$P(\mathrm{I}_2|W)=\frac{0.1392}{0.3631}=0.3834$　・・・⑲

$P(\mathrm{II}_1|W)=\frac{0.0196}{0.3631}=0.0540$　・・・⑳

$P(\mathrm{II}_2|W)=\frac{0.0245}{0.3631}=0.0675$　・・・㉑

$P(\mathrm{III}|W)=\frac{0.0276}{0.3631}=0.0760$　・・・㉒

(ⅲ)自分の最初の役がスリーカードのとき

確率については表 4 のようになる。

表 4　スリーカード確率導出

	分子立式	分母立式	結果
$P(O)$	理由不十分の原則		0.2500
$P(\mathrm{I})$	理由不十分の原則		0.2500
$P(\mathrm{II})$	理由不十分の原則		0.2500
$P(\mathrm{III})$	理由不十分の原則		0.2500
$P(a\|O)$	0	${}_{49}C_0$	0.0000
$P(a\|\mathrm{I})$	0	${}_{49}C_1$	0.0000
$P(a\|\mathrm{II})$	${}_{48}C_2$	${}_{49}C_2$	0.9592
$P(a\|\mathrm{III})$	※1	${}_{49}C_3$	0.0118
$P(b\|O)$	0	${}_{49}C_0$	0.0000
$P(b\|\mathrm{I})$	${}_{48}C_1$	${}_{49}C_1$	0.9796
$P(b\|\mathrm{II})$	※2		0.0408
$P(b\|\mathrm{III})$	※3	${}_{49}C_3$	0.0102

$P(c\|O)$	1	${}_{49}C_0$	1.0000
$P(c\|\mathrm{I})$	1	${}_{49}C_1$	0.0204
$P(c\|\mathrm{II})$	0	${}_{49}C_2$	0.0000
$P(c\|\mathrm{III})$	${}_{12}C_1 \times {}_{4}C_3$	${}_{49}C_3$	0.0026

※1 ${}_{12}C_1 \times {}_{4}C_1 + {}_{11}C_1 \times {}_{4}C_1 + {}_{10}C_1 \times {}_{4}C_1 + {}_{11}C_1 \times {}_{4}C_1 + {}_{10}C_1 \times {}_{4}C_1 + {}_{1}C_1$

※2 $1 - \frac{{}_{48}C_2}{{}_{49}C_2}$

※3 ${}_{1}C_1 \times {}_{12}C_1 \times {}_{4}C_2 + {}_{12}C_1 \times {}_{4}C_2 + {}_{11}C_1 \times {}_{4}C_1$

このとき，⑧より，

$P(W) = 0.4684$ ・・・㉓

よって，⑩，⑪より，

$P(O|W) = \frac{0.2494}{0.4684} = 0.5325$ ・・・㉔

$P(\mathrm{I}|W) = \frac{0.2079}{0.4684} = 0.4439$ ・・・㉕

$P(\mathrm{II}|W) = \frac{0.0084}{0.4684} = 0.0179$ ・・・㉖

$P(\mathrm{III}|W) = \frac{0.0027}{0.4684} = 0.0058$ ・・・㉗

(C)「単純ポーカー」必勝法の考察とルールの検証

(ⅰ)自分の最初の役がノーペアのとき

⑭～⑰より，$P(\mathrm{I}|W)$のときの確率が最も大きい。このことから，自分の最初の役がノーペアのときは1枚交換することが必勝法だと考えられる。

(ⅱ)自分の最初の役がワンペアのとき

㉑～㉖より，$P(\mathrm{I}_2|W)$のときの確率が最も大きい。このことから，自分の最初の役がワンペアのときはペアを崩さず1枚交換(ペアになっているカード以外を交換)することが必勝法だと考えられる。

(ⅲ)自分の最初の役がスリーカードのとき

㉚～㉝より，$P(O|W)$のときの確率が最も大きい。このことから，自分の最初の役がスリーカードのときは交換しないことが必勝法だと考えられる。

(ⅳ)「単純ポーカー」のルールの検証

「単純ポーカー」においては，カードを3枚しか用いないルールの特性上，最初にワンペアができる確率が 0.1694 であり，通常のルールのポーカーでワンペアができる確率である 0.4226(『ポーカーの確率』より)に比べて非常に低くなっており，ワンペアができること自体がまれである。そのため，最も強い役のスリーカードにおいて，勝ったとき，1 枚交換した時の確率が高くなっている(㉛)のは，これが原因だと考えられる。

そのため，「単純ポーカー」のルールをより実際のポーカーのルールに近いものにして必勝法を求めることが必要だと考えられる。

(D)「単純ポーカー4枚 ver.」のルール設定

次に「単純ポーカー」をより実際のルールに近づけるために，使用するカードの枚数を増やした「単純ポーカー4 枚 ver.」の必勝法を導出する。

「単純ポーカー4枚 ver.」のルールを以下のように定める。

・使用するカードはジョーカーを含まない 52 枚。
・最初に山札から引く枚数は 4 枚。
・手札を見て，任意の枚数交換する。ここで捨てたカードは再び戻ってこないものとする。
・役は，ノーペア(同数字のカードなし)，ワンペア(同数字のカード 2 枚)，ツーペア(同数字のカード 2 枚が 2 組)，スリーカード(同数字のカード 3 枚)，フォーカード(同数字のカード 4 枚)とする。後に書いてあるものほど強いとし，相手よりも強い役を持っていれば勝ちとする。
・数字による強さは考えず，相手と自分の役が同じときは引き分けとする。
・自分と相手の使用する山札は異なるとする。
・相手は手札を交換しないものとする。

(E)「単純ポーカー4枚 ver.」の確率導出

今回も3枚の「単純ポーカー」と同様に自分の最初の役によって

(ⅰ)自分の最初の役がノーペアのとき
(ⅱ)自分の最初の役がワンペアのとき
(ⅲ)自分の最初の役がツーペアのとき
(ⅳ)自分の最初の役がスリーカードのとき
(ⅴ)自分の最初の役がフォーカードのとき

の5通りに場合分けし，確率を導出し，必勝法を考察する。

確率導出で用いる記号は，以下の通りとする。

A…自分の最初の役がノーペア
B…自分の最初の役がワンペア
C…自分の最初の役がツーペア
D…自分の最初の役がスリーカード
E…自分の最初の役がフォーカード
a…自分の交換後の役がノーペア
b…自分の交換後の役がワンペア
c…自分の交換後の役がツーペア
d…自分の交換後の役がスリーカード
e…自分の交換後の役が交換後フォーカード
α…相手がノーペア　β…相手がワンペア
γ…相手がツーペア　δ…相手がスリーカード
ε…相手がフォーカード
O…交換枚数 0 枚　Ⅰ…交換枚数 1 枚
Ⅱ…交換枚数 2 枚　Ⅲ…交換枚数 3 枚
Ⅳ…交換枚数 4 枚
1…交換パターン 1　2…交換パターン 2
3…交換パターン 3

確率導出においては一部で Excel を利用する。また，確率は小数で導出し，無限小数となった場合は，小数点以下 8 桁目を四捨五入し，小数点以下 7 桁の小数で表現する。

なお，場合分けに関わらない共通の確率は以下の表 5 の通り。

表 5　共通の確率導出

	分子立式	分母立式	結果
P(A)	※1	${}_{52}C_4$	0.676110
P(B)	※2	${}_{52}C_4$	0.304250
P(C)	※3	${}_{52}C_4$	0.010372
P(D)	※4	${}_{52}C_4$	0.009220
P(E)	${}_{13}C_1 \times {}_4C_4$	${}_{52}C_4$	0.000048
P(α)	P(A)に同じ		0.676110
P(β)	P(B)に同じ		0.304250
P(γ)	P(C)に同じ		0.010372
P(δ)	P(D)に同じ		0.009220
P(ε)	P(E)に同じ		0.000048

※1　${}_{13}C_4 \times ({}_4C_1)^4$
※2　${}_{13}C_1 \times {}_4C_2 \times {}_{12}C_2 \times ({}_4C_1)^2$
※3　${}_{13}C_2 \times ({}_4C_2)^2$
※4　${}_{13}C_1 \times {}_4C_3 \times {}_{48}C_1$

また，勝つ確率，すなわち P(W)は次のようになる。

$P(W) = P(b\cap\alpha) + P(c\cap\alpha) + P(c\cap\beta) + P(d\cap\alpha) + P(d\cap\beta) + P(d\cap\gamma) + P(e\cap\alpha) + P(e\cap\beta) + P(e\cap\gamma) + P(e\cap\delta)$　・・・㉘

さらに，確率導出は以下に示す例のように行った。ここでは例として，(ⅱ)の自分の最初の役がワンペアで，交換パターン 2 で 2 枚交換したとき，ノーペアとなるとき（すなわち$P(a|Ⅱ_2)$のとき）の考え方を示す。（交換パターンについては後述。）

V，W，X，Y，Zを，それぞれ 1 以上 13 以下の整数とし，$V \neq W \neq X \neq Y \neq Z$とする。
VVWXが揃い，V と Wを交換したとき，交換後のカードがノーペアとなる組み合わせについて，
（あ）W と Yを取り出す場合
（い）Y と Zを取り出す場合
の 2 通りが考えられる。
（あ）W と Yを取り出す場合
Wは残り 3 枚から 1 枚を選択するので，${}_3C_1$。
また，Zに関しては，V，W，X以外の整数であればよいので，残り 40 枚から 1 枚を取り出すため${}_{40}C_1$。
よって，${}_3C_1 \times {}_{40}C_1$
（い）Y と Zを取り出す場合
Y，Zに関しては，V，W，X以外の整数であればよいので，V，W，X以外の数字からY，Zを選択し，かつX，Yはマークの異なる残り 4 枚から 1 枚を選択するので${}_{10}C_2 \times ({}_4C_1)^2$
よって，カードの取り出し方は全部で${}_{48}C_2$通りで，（あ）と（い）は互いに排反より，求める確率は，

$\frac{{}_3C_1 \times {}_{40}C_1}{{}_{48}C_2} + \frac{{}_{10}C_2 \times ({}_4C_1)^2}{{}_{48}C_2} = 0.744681$よって，0.744681。

（ⅰ）自分の最初の役がノーペアのとき
このとき，㉘より，
$P(W) = 0.142356$　・・・㉙

また，⑩について

$P(操作|W) = P(操作)\{P(b|操作)P(\alpha) + P(c|操作)P(\alpha) + P(c|操作)P(\beta) + P(d|操作)P(\alpha) + P(d|操作)P(\beta) + P(d|操作)P(\gamma) + P(e|操作)P(\alpha) + P(e|操作)P(\beta) + P(e|操作)P(\gamma) + P(e|操作)P(\delta)\}$ ・・・㉚

であるから，

$P(O|W) = \frac{0}{0.142356} = 0$ ・・・㉛

$P(\mathrm{I}|W) = \frac{0.025354}{0.142356} = 0.178103$ ・・・㉜

$P(\mathrm{II}|W) = \frac{0.040020}{0.142356} = 0.281126$ ・・・㉝

$P(\mathrm{III}|W) = \frac{0.045974}{0.142356} = 0.322951$ ・・・㉞

$P(\mathrm{IV}|W) = \frac{0.031008}{0.142356} = 0.217820$ ・・・㉟

（ⅱ）自分の最初の役がワンペアのとき

この場合分けにおいて「交換パターン 1」,「交換パターン 2」,「交換パターン 3」とは以下のような操作を指す。

例）1，1，2，3 がそろっているとき

交換枚数 1 枚のとき

交換パターン 1→1 を交換

交換パターン 2→2 または 3 を交換

交換枚数 2 枚のとき

交換パターン 1→2 と 3 を交換

交換パターン 2→1 と 2 または 1 と 3 を交換

交換パターン 2→1 と 1(1 を 2 枚）交換

交換枚数 3 枚のとき

交換パターン 1→1 と 2 と 3 を交換

交換パターン 2→1 と 1 と 1(1 を 3 枚）交換

このとき，㉘より，

P(W)＝0.292656 ・・・㊱

よって，⑩，㉚より，

$P(O|W) = \frac{0}{0.29206256} = 0$ ・・・㊲

$P(\mathrm{I}_1|W) = \frac{0.085454}{0.292656} = 0.291995$ ・・・㊳

$P(\mathrm{I}_2|W) = \frac{0.012521}{0.292659} = 0.042784$ ・・・㊴

$P(\mathrm{II}_1|W) = \frac{0.079986}{0.292656} = 0.273311$ ・・・㊵

$P(\mathrm{II}_2|W) = \frac{0.019483}{0.292656} = 0.066573$ ・・・㊶

$P(\mathrm{II}_3|W) = \frac{0.022300}{0.292656} = 0.076199$ ・・・㊷

$P(\mathrm{III}_1|W) = \frac{0.021874}{0.292656} = 0.074743$ ・・・㊸

$P(\mathrm{III}_2|W) = \frac{0.025815}{0.292656} = 0.088209$ ・・・㊹

$P(\mathrm{IV}|W) = \frac{0.025223}{0.292656} = 0.086187$ ・・・㊺

（ⅲ）自分の最初の役がツーペアのとき

この場合分けにおいて「交換パターン 1」,「交換パターン 2」とは以下のような操作を指す。

例）1，1，2，2 がそろっているとき

交換枚数 2 枚のとき

交換パターン 1→1 と 1 または 2 と 2(同数字を 2 枚）交換

交換パターン 2→1 と 2 を交換

確率については以下の表 8 のようになる。

このとき，㉘より，

P(W)＝0.496067 ・・・㊻

よって，⑩，㉚より，

$P(O|W) = \frac{0.163394}{0.496067} = 0.329379$ ・・・㊼

$P(\mathrm{I}|W) = \frac{0.116983}{0.496067} = 0.235827$ ・・・㊽

$P(\mathrm{II}_1|W) = \frac{0.119222}{0.496067} = 0.240334$ ・・・㊾

$P(\mathrm{II}_2|W) = \frac{0.025047}{0.496067} = 0.050491$ ・・・㊿

$P(\mathrm{III}|W) = \frac{0.033085}{0.496067} = 0.066695$ ・・・51

$P(\mathrm{IV}|W) = \frac{0.038336}{0.496067} = 0.077280$ ・・・52

（ⅳ）自分の最初の役がスリーカードのとき

この場合分けにおいて「交換パターン 1」,「交換パターン 2」とは以下のような操作を指す。

例）1，1，1，2 がそろっているとき

交換枚数 1 枚のとき

交換パターン 1→2 を交換

交換パターン 2→1 を交換

交換枚数 2 枚のとき

交換パターン 1→1 と 1(1 を 2 枚）を交換

交換パターン 2→1 と 2 を交換

交換枚数 3 枚のとき

交換パターン 1→1 と 1 と 2 を交換

交換パターン 2→1 と 1 と 1(1 を 3 枚）交換

このとき，㉘より，

P(W)＝0.521489 ・・・53

よって，⑩，㉚より，

$P(O|W)=\frac{0.123842}{0.521489}=0.237478$ ・・・㊹

$P(\mathrm{I}_1|W)=\frac{0.087710}{0.521489}=0.168191$ ・・・㊺

$P(\mathrm{I}_2|W)=\frac{0.123866}{0.521489}=0.237524$ ・・・㊻

$P(\mathrm{II}_1|W)=\frac{0.018786}{0.521489}=0.036024$ ・・・㊼

$P(\mathrm{II}_2|W)=\frac{0.088479}{0.521489}=0.169666$ ・・・㊽

$P(\mathrm{III}_1|W)=\frac{0.029459}{0.521489}=0.056490$ ・・・㊾

$P(\mathrm{III}_2|W)=\frac{0.020268}{0.521489}=0.038866$ ・・・㊿

$P(\mathrm{IV}|W)=\frac{0.029079}{0.521489}=0.055761$ ・・・㉑

（ⅴ）自分の最初の役がフォーカードのとき

このとき，㉘より，

$P(W)=0.668249$ ・・・㊼

よって，⑩，㉚より，

$P(O|W)=\frac{0.199999}{0.668249}=0.299275$ ・・・㊸

$P(\mathrm{I}|W)=\frac{0.198146}{0.668249}=0.296515$ ・・・㊹

$P(\mathrm{II}|W)=\frac{0.196205}{0.668249}=0.293611$ ・・・㊺

$P(\mathrm{III}|W)=\frac{0.025318}{0.668249}=0.037887$ ・・・㊻

$P(\mathrm{IV}|W)=\frac{0.048590}{0.668249}=0.072712$ ・・・㊼

(F)「単純ポーカー4 枚 ver.」必勝法の考察とルールの検証

（ⅰ）自分の最初の役がノーペアのとき

㉛～㉟より，$P(\mathrm{III}|W)$のときの確率が最も大きい。このことから，自分の最初の役がノーペアのときは，3 枚交換することが必勝法だと考えられる。

（ⅱ）自分の最初の役がワンペアのとき

㊲～㊺より，$P(\mathrm{I}_1|W)$のときの確率が最も大きい。このことから，自分の最初の役がワンペアのときは，交換パターン 1 で 1 枚交換(ペアになっているカード以外のうち 1 枚を交換)することが必勝法だと考えられる。

（ⅲ）自分の最初の役がツーペアのとき

㊼～52より，$P(O|W)$のときの確率が最も大きくなっている。このことから，自分の最初の役がツーペアのときは，交換しないことが必勝法だと考えられる。

（ⅳ）自分の最初の役がスリーカードのとき

54～61より，$P(\mathrm{I}_2|W)$のときの確率が最も大きくなっている。このことから，自分の最初の役がスリーカードのときは，交換パターン 2 で 1 枚交換（ペアがそろっていないカードを交換すること）が必勝法だと考えられる。

（ⅴ）自分の最初の役がフォーカードのとき

63～67より，$P(O|W)$のときの確率が最も大きくなっている。このことから，自分の最初の役がフォーカードのときは，交換しないことが必勝法だと考えられる。

（ⅵ）「単純ポーカー4 枚 ver.」のルールの検証

自分の最初の役がノーペアのときの必勝法が，3 枚の際に比べて変化している。また，役が増えていることから，より実際のポーカーに近い状態の必勝法が導出できたと考えられる。

(3)「単純ポーカー4 枚 ver.」必勝法の検証

（ⅰ）目的

「単純ポーカー4 枚 ver.」においては，3 枚の「単純ポーカー」に比べ，ポーカーに勝ったときの原因の確率の差が少なくなっている。よって，実際の試行においては確率と異なる結果が出ることがあるのではないかと考え，Excel VBA を用いて検証を行った。

（ⅱ）作成したプログラム

(2)の(E)における場合分けと操作ごとにプログラムを設定した。ここでは，「自分の最初の役がノーペアで 1 枚交換したとき」のプログラムを例としてあげる。なお，他の場合分けにおいては，乱数の最大値と出現の割合を変化させている。

作成したマクロ

```
Sub 計算()
    kaisuu = Range("A2").Value
```

試行回数を定義

```
    For j = 1 To kaisuu
```

試行回数繰り返す

```
koukanngo = Int(48 * Rnd + 1)
Range("A3").Value = koukanngo

If Range("A3").Value <= 9 Then
Cells(j, 3) = "ワンペア"
Else
Cells(j, 3) = "ノーペア"
End If
```

交換後の役を乱数で発生・定義

```
aite = Int(270725 * Rnd + 1)
Range("A4").Value = aite

If Range("A4").Value <= 13 Then
Cells(j, 4) = "フォーカード"
ElseIf Range("A4").Value > 13 And Range("A4").Value <= 2509 Then
Cells(j, 4) = "スリーカード"
ElseIf Range("A4").Value > 2509 And Range("A4").Value <= 5317 Then
Cells(j, 4) = "ツーペア"
ElseIf Range("A4").Value > 5317 And Range("A4").Value <= 16536 Then
Cells(j, 4) = "ワンペア"
Else
Cells(j, 4) = "ノーペア"
End If
```

相手の役を乱数で発生・定義

```
If Cells(j, 3) = "ワンペア" And Cells(j, 4) = "ノーペア" Then
Cells(j, 5) = 1
Else
Cells(j, 5) = 0
End If
```

勝敗を判定

```
Next
```

ここまでを繰り返す

```
Dim cnt
kaisuu = Range("A2").Value
For n = 1 To kaisuu
  If Cells(n, 5) = "1" Then cnt = cnt + 1
 Next n
 MsgBox "勝利数は、" & cnt & "回です。"
```

勝利数を数えて表示

```
End Sub
```

(ⅲ)検証回数の決定

(あ)目的

試行回数を決定していくため，(ⅰ)で示した「自分の最初の役がノーペアで１枚交換したとき」のプログラムを用いて，誤差を減らすにはおよそ何回の検証を行う必要があるのか調べた。

(い)検証方法

試行回数を1000回から徐々に増やしていき，それぞれの試行回数において10回検証を行う。(最大勝ち数－最小勝ち数)÷(試行回数)×100の式により，範囲の割合が何％なのか導出する。

(う)検証結果

表11　検証回数と勝利数

	1000回	10000回	20000回	50000回
1	171	1796	3497	8804
2	190	1753	3497	8923
3	163	1749	3430	8762
4	192	1746	3494	8621
5	170	1772	3520	8775
6	180	1900	3451	8947
7	168	1733	3613	8763
8	165	1747	3581	8844
9	168	1767	3537	8929
10	189	1697	3510	8913
平均	175.6	1766.3	3513.0	8828.1
範囲	2.900	2.030	0.915	0.652

(え)考察

検証回数が増えるほど，範囲の割合が減少している。また，試行回数20000回から，試行回数1000回における192回のような，他の値と比べて明らかにかけ離れている値が見られなくなっている。このことから，検証回数はより多い方が良いと考えられる。

また，試行回数 20000 回において，明らかにかけ離れている値が見られなくなったことから，試行回数は少なくとも 20000 回が望ましいと考え，今研究では試行回数として 20000 回を採用した。

(ⅳ)検証結果

今研究では，(E)における場合分けのうち，(ⅰ)の自分の最初の役がノーペアのときのプログラムのみを作成できた。よって，そのときのみの必勝法を検証した。

表 15　検証結果(自分の最初の役がノーペアのとき)

交換枚数	勝利数(回)	勝率(%)
0 枚	0	0
1 枚	3532	17.660
2 枚	13628	68.140
3 枚	5896	29.480
4 枚	6105	30.525

(ⅴ)考察

実際の必勝法では，3 枚交換が必勝法だが，検証では 2 枚交換が必勝法であるという結果が出た。

この原因として，3 枚交換したとき，ノーペアのできない確率が約 0.25 である一方，2 枚交換したときは約 0.28 であり，3 枚のほうがより強い役ができやすい一方で，相手がノーペアである確率が高いことから，「ノーペア以外の役ができたら勝ち」という状態となり，より役のできやすい 2 枚交換が検証においてはより勝ちやすい結果が出たと考えられる。そのため，この差異をなくすための必勝法の導出の方法の再考が必要である。

６.結論

「単純ポーカー」においては，自分の最初の役がノーペアのときは 1 枚，ワンペアのときは交換パターン 1 で 1 枚交換し，スリーカードのときは交換しないことが必勝法である。

また,「単純ポーカー4 枚 ver.」においては，ノーペアのときは 3 枚，ワンペアのときは交換パターン 1 で 1 枚，スリーカードのときは交換パターン 2 で 1 枚交換し，ツーペア，フォーカードのときは交換しないことが必勝法である。

７.今後の展望

今後,「単純ポーカー4 枚 ver.」の残りの部分の検証も乱数の最大値と発生の割合を変化させて行う。

また，検証と必勝法との結果の差異を無くすために，ベイズ統計学を用いた新たな導出方法を模索し，検証を行う。

８.参考文献・引用文献

・『史上最強図解　これならわかる！ベイズ統計学』涌井良幸　涌井貞美　ナツメ社

・『Excel でスッキリわかるベイズ統計入門』涌井良幸　涌井貞美　日本実況出版社

・『結果から原因を推理する「超」入門ベイズ統計』石村貞夫　講談社

・『高等学校数学 A』数研出版

・『エディノート数学Ⅰ＋A』啓林館

・『ポーカーの確率』熊本国府高等学校 http://www.kumamotokokufu-h.ed.jp/kokufu/math/game_p.html

・『入門者の Excel VBA』立山秀利　講談社

・『Excel VBA で範囲を指定して乱数を生成する:Rnd,Int』 http://uxmilk.jp/48336

・『office TANAKA-Excel VBA ベース的活用法[データをカウントする]』 http://officetanaka.net/excel/vba/db/db02.htm