

ブラックジャックにおけるベイズ統計学の利用

2539 與合 皇介 2536 山内 脩平 2605 伊藤 直斗 2636 山口 耀生

要旨

ブラックジャックにおけるプレイヤーの勝率を、カードを引いたときの合計値それぞれの確率を、表計算ソフトを使い、計算させることで求めることができた。

その結果、プレイヤーの勝率は、プレイヤーとディーラーの最初に配られたカードの合計値によって異なることが分かり、またその勝率は、どのパターンでも半数を下回ることが分かった。

1. 目的

ベイズ統計学を使ってブラックジャックにおけるプレイヤーの勝率が、求められることを証明するためにブラックジャックにおけるプレイヤーの勝率を場合分けによって求める。

2. ブラックジャックのルール

ジョーカーを除いた 52 枚のトランプを使用するゲーム

プレイヤーは、カードの合計値が 21 を超えないようにカードを追加し、ディーラーは、カードの合計値が 17 を超えるまでカードを引き続ける（ディーラーとは、相手プレイヤーのこと）

プレイヤーは、カードを追加した時、22 を超えた場合バーストといってその時点でプレイヤーの負けとなる。

ディーラーもまたプレイヤーと同様にバーストとなったらディーラーの負け、すなわちプレイヤーの勝ちとなる。

A は 1 または 11 として、J・Q・K は 10 として扱う。（A はプレイヤーが 1 か 11 どちらかにするか選択できる。）

3. ゲームの進行について

まずプレイヤーとディーラーには、山札から 2 枚のカードが配られる。（この時プレイヤーは、配られたカードを表向きにして場に出し、ディーラーは、1 番最初に配られたカードを表向きに、次に配られたカードを裏向きにして場に出す。）

プレイヤーは、カードの合計値を 21 に近づけるためにカードを追加するスタンド、配られたカードで勝負をするヒット、勝負を降りるサレンダーの 3 つの行動を選択できる。

全プレイヤーが、スタンドまたはヒットしたらディーラーは自身のカードの合計値が 17 以上になるまでカードを引き続ける。

その後プレイヤーとディーラーが、バーストしていない場合は、両プレイヤーのカードの合計値を比べ、高いほうが勝ちとなる。

4. 仮説

ブラックジャックは、プレイヤーが勝ちやすいゲームと言われているので、プレイヤーの勝率は半分を超えると考える。

5. 使用した道具・ソフト

- ・ パーソナルコンピューター
- ・ Excel2016

6. 実験手順

場合分けを行い、プレイヤーの勝率を求める。プレイヤーの勝率を求めるにあたって、確率を導出する利便性のため、ブラックジャックのルールを簡易化した「簡易ブラックジャック」におけるプレイヤーの勝率を求める。その後、一般的なブラックジャックのルールに拡張する。簡易ブラックジャックのルールを以下のように定める。

対戦形式はプレイヤー対ディーラーの1対1
Aは1または11として扱わず、1としてのみ考
える。

プレイヤーはサレンダーできない。

ディーラーは2枚目に配られたカードを表向き
にして、場に出す。

カードを1枚追加する確率は、近似値をとって
常に4/52つまり1/13とする。

カードの合計値を比べた時、値が同じならば引
き分けとする

7. 結果

簡易ブラックジャックの確率導出

今回は、最初に配られた2枚のカードの合計値
が12以上の時しか行うことができなかった。確
率導出においてExcelを用いる。確率は、小数で
導出し、無限小数の場合は小数点以下5桁目を四
捨五入し、小数点以下4桁の小数で表現する。

また今回求めた確率は、

(i) プレイヤーが1枚カードを引いた時とその
時のプレイヤーの勝率

(ii) プレイヤーが2枚カードを引いた時とその
時のプレイヤーの勝率

の2つである。

表記について

最初に配られたカードがx.yの時(x.y)と
表す。

注) (5.7) (7.5) は同じ

例) (5.7) の時 a 枚引いて合計が b になる時
((5.7) . a. b) と表す。

またディーラーはカードの合計値が17以上
になるまで引き続けるので、上記の例の場合
((5.7) . b) となる。

(i) プレイヤーが1枚カードを引いた時とその
時のプレイヤーの勝率

まず、プレイヤーが1枚カードを引いた時の確
率を求める。カードを1枚引いた時、引いたカー
ドが特定の1種類の数字のカードである確率は以
下のように求める。

例) 最初に配られたカードが5と7でカードを引
いた時カードの合計値が16の時

簡易ルールよりカードを1枚引く確率は、常に
1/13

よって $1/13 \div 0.0769$

同様にこの作業を行うと表1のようになる。

(表1参照)

次に、ディーラーがカードを引き続け合計値が
17以上になる確率を求める。

確率導出は以下のように求める。

例) 最初にディーラーに配られたカードが(7.8)
でカードを引いた時のカードの合計値が18の時
このようになるためには、(1) カードを1枚引い
た時3が出る。または、(2) カードを2枚引いた
時1、2の順番に出る。

(1) カードを1枚引いた時3が出る確率

簡易ルールよりカードを1枚引く確率は、常に
1/13

よって $1/13 \div 0.0769$

(2) カードを2枚引いた時1、2の順番に出る確
率

簡易ルールよりカードを1枚引く確率は、常に
1/13より

$(1/13) * (1/13) \div 0.0059$

(1) (2) より

$1/13 + (1/13) * (1/13) \div 0.0683$

同様にこの作業を行うと表2のようになる。

(表2参照)

最後に勝率を求める。

確率導出は以下のように求める。

例) プレイヤーに最初に配られたカードが(7.10)
ディーラーに最初に配られたカードが(5.10)の時

カードを1枚引いた時のプレイヤーの勝率を
P(w)とする。

$P(w) = P((7.10) . 1. 18) + P((7.10) . 1. 19) + P$

$$\begin{aligned}
& ((7.10).1.20) + P((7.10).1.21)) * P((5.10).22)) \\
& + (P((7.10).1.18) + P((7.10).1.19)) + P \\
& ((7.10).1.20) + P((7.10).1.21)) * P((5.10).17)) \\
& + (P((7.10).1.19) + P((7.10).1.20) + P \\
& ((7.10).1.21)) * P((5.10).18)) + (P \\
& ((7.10).1.20) + P((7.10).1.21)) * P((5.10).19) \\
& + P((7.10).1.21)) * P((5.10).22)) \doteq 0.2327
\end{aligned}$$

同様にこの作業を行うと表3のようになる。

(表3参照)

(ii) プレイヤーが2枚カードを引いた時とその時のプレイヤーの勝率

まず、プレイヤーが2枚カードを引いた時の確率を求める。カードを2枚引いた時、引いたカードが特定の1種類の数字のカードである確率は以下のように求める。

例) 最初に配られたカードが5と7でカードを2枚引いた時カードの合計値が16の時

このようになるためには、配られた2枚のカードの順番が、1.3 3.1 2.2となる場合である。簡易ルールよりカードを1枚引く確率は、常に1/13より

$$(1/13) * (1/13) * 3 \doteq 0.0178$$

同様にこの作業を行うと表4のようになる。

(表4参照)

(i) の時と同様に勝率を求める。

ディーラーはカードの合計値が17以上になるまで引き続けるため表2を用いる。

プレイヤーがカードを2枚引いた時の勝率をP(N)とする。

例) プレイヤーに最初に配られたカードが(7.10)ディーラーに最初に配られたカードが(5.10)の時

$$\begin{aligned}
P(N) = & P((7.10).2.19) + P((7.10).2.20) + P \\
& ((7.10).2.21)) * P((5.10).22)) + P((7.10).1.19) \\
& + P((7.10).2.20) + P((7.10).2.21)) * P \\
& ((5.10).17)) + (P((7.10).2.19) + P \\
& ((7.10).2.20) + P((7.10).2.21)) * P((5.10).18)) \\
& + (P((7.10).2.20) + P((7.10).2.21)) * P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((5.10).19) + P((7.10).2.21)) * P((5.10).22)) \\
& \doteq 0.0306
\end{aligned}$$

同様にこの作業を行うと表5のようになる。

(表5参照)

8. 考察

カードの合計値が同じ場合、カードを引いたとき、特定の1種類の数字のカードである確率は同じであることが分かった。

今回求めた勝率では、プレイヤーに最初に配られたカードの合計値が12、ディーラーに最初に配られたカードの合計値が16のとき、勝率が最大になることが分かった。

また、どのパターンでも勝率が半数を越えなかったのは、ルール設定に、ディーラーに配られた2枚のカードを表向きにして、場に出すとあったのでそれによって大きく確率が変化してしまったと考える。簡易ルールを改める必要がある。

更に、今回はプレイヤー、ディーラーともに最初に配られたカードの合計値が12からしか計算しなかったが、合計値が2からの場合などのときの勝率も考えられるためデータの不足も多々あった。

9. 今後の展望

引き続き、場合分けを利用してカードの枚数をさらに増やしたときのデータを算出し、より正確な勝率を求める。

ベイズ統計学を利用して勝率を求める。

場合分けで求めた勝率と、ベイズ統計学で求めた勝率を比較する。

10. 参考文献

講演会「見方で変わる数学の学び」

表 1 プレイヤーがカードを 1 枚引く時の確率導出

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22 以上
(2, 10)	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 3077
(3, 9)	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 3077
(4, 8)	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 3077
(5, 7)	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 3077
(6, 6)	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 3077
(3, 10)		0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 3846
(4, 9)		0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 3846
(5, 8)		0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 3846
(6, 7)		0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 3846
(4, 10)			0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 4615
(5, 9)			0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 4615
(6, 8)			0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 4615
(7, 7)			0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 4615
(5, 10)				0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 5385
(6, 9)				0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 5385
(7, 8)				0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 5385
(6, 10)					0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 6154
(7, 9)					0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 6154
(8, 8)					0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 6154
(7, 10)						0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 6923
(8, 9)						0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 6923
(8, 10)							0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 7692
(9, 9)							0. 0769	0. 0769	0. 0769	0. 7692
(9, 10)								0. 0769	0. 0769	0. 8462
(10, 10)									0. 0769	0. 9231

表 2 プレイヤーがカードを 2 枚引く時の確率導出

	14	15	16	17	18	19	20	21	22 以上
(2, 10)	0. 0059	0. 0118	0. 0178	0. 0237	0. 0300	0. 0355	0. 0414	0. 0473	0. 7870
(3, 9)	0. 0059	0. 0118	0. 0178	0. 0237	0. 0300	0. 0355	0. 0414	0. 0473	0. 7870
(4, 8)	0. 0059	0. 0118	0. 0178	0. 0237	0. 0300	0. 0355	0. 0414	0. 0473	0. 7870
(5, 7)	0. 0059	0. 0118	0. 0178	0. 0237	0. 0300	0. 0355	0. 0414	0. 0473	0. 7870
(6, 6)	0. 0059	0. 0118	0. 0178	0. 0237	0. 0300	0. 0355	0. 0414	0. 0473	0. 7870

(3, 10)		0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.0300	0.0355	0.0414	0.8343
(4, 9)		0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.0300	0.0355	0.0414	0.8343
(5, 8)		0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.0300	0.0355	0.0414	0.8343
(6, 7)		0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.0300	0.0355	0.0414	0.8343
(4, 10)			0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.0300	0.0355	0.8754
(5, 9)			0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.0300	0.0355	0.8754
(6, 8)			0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.0300	0.0355	0.8754
(7, 7)			0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.0300	0.0355	0.8754
(5, 10)				0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.0300	0.9112
(6, 9)				0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.0300	0.9112
(7, 8)				0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.0300	0.9112
(6, 10)					0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.9408
(7, 9)					0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.9408
(8, 8)					0.0059	0.0118	0.0178	0.0237	0.9408
(7, 10)						0.0059	0.0118	0.0178	0.9645
(8, 9)						0.0059	0.0118	0.0178	0.9645
(8, 10)							0.0059	0.0118	0.9823
(9, 9)							0.0059	0.0118	0.9823
(9, 10)								0.0059	0.9941
(10, 10)									1

表3 ディーラーがカードを引き続け合計値が17以上になる確率導出

	17	18	19	20	21	22 以上
(2, 10)	0.1035	0.1035	0.1035	0.1035	0.1035	0.4827
(3, 9)	0.1035	0.1035	0.1035	0.1035	0.1035	0.4827
(4, 8)	0.1035	0.1035	0.1035	0.1035	0.1035	0.4827
(5, 7)	0.1035	0.1035	0.1035	0.1035	0.1035	0.4827
(6, 6)	0.1035	0.1035	0.1035	0.1035	0.1035	0.4827
(3, 10)	0.0961	0.0961	0.0961	0.0961	0.0961	0.521
(4, 9)	0.0961	0.0961	0.0961	0.0961	0.0961	0.521
(5, 8)	0.0961	0.0961	0.0961	0.0961	0.0961	0.521
(6, 7)	0.0961	0.0961	0.0961	0.0961	0.0961	0.521
(4, 10)	0.0892	0.0892	0.0892	0.0892	0.0892	0.5539
(5, 9)	0.0892	0.0892	0.0892	0.0892	0.0892	0.5539
(6, 8)	0.0892	0.0892	0.0892	0.0892	0.0892	0.5539
(7, 7)	0.0892	0.0892	0.0892	0.0892	0.0892	0.5539
(5, 10)	0.0828	0.0828	0.0828	0.0828	0.0828	0.5858

(6, 9)	0.0828	0.0828	0.0828	0.0828	0.0828	0.5858
(7, 8)	0.0828	0.0828	0.0828	0.0828	0.0828	0.5858
(6, 10)	0.0762	0.0762	0.0762	0.0762	0.0762	0.6154
(7, 9)	0.0762	0.0762	0.0762	0.0762	0.0762	0.6154
(8, 8)	0.0762	0.0762	0.0762	0.0762	0.0762	0.6154

表4 プレイヤーがカードを1枚引く時の勝率

	dealer	12	13	14	15	16	17	18	19	20
player										
12		0.4137	0.4345	0.4519	0.4691	0.4845	0.3076	0.2307	0.1538	0.0769
13		0.3765	0.3944	0.4094	0.4241	0.4372	0.3076	0.2307	0.1538	0.0769
14		0.3394	0.3544	0.3668	0.3790	0.3899	0.3076	0.2307	0.1538	0.0769
15		0.3023	0.3143	0.3242	0.3340	0.3425	0.3076	0.2307	0.1538	0.0769
16		0.2652	0.2742	0.2816	0.2889	0.2952	0.3076	0.2307	0.1538	0.0769
17		0.2281	0.2342	0.2390	0.2439	0.2479	0.3076	0.2307	0.1538	0.0769
18		0.1830	0.1867	0.1895	0.1924	0.1947	0.2307	0.2307	0.1538	0.0769
19		0.1300	0.1319	0.1332	0.1347	0.1357	0.1538	0.1538	0.1538	0.0769
20		0.0690	0.0696	0.0700	0.0705	0.0708	0.0769	0.0769	0.0769	0.0769

表5 プレイヤーがカードを2枚引く時の勝率

	dealer	12	13	14	15	16	17	18	19	20
player										
12		0.1459	0.1510	0.1552	0.1593	0.1629	0.1542	0.1242	0.0887	0.0473
13		0.1170	0.1207	0.1237	0.1268	0.1293	0.1306	0.1069	0.0769	0.0414
14		0.0910	0.0935	0.0956	0.0977	0.0994	0.1070	0.0892	0.0655	0.0355
15		0.0677	0.0694	0.0707	0.0720	0.0731	0.0833	0.0715	0.0537	0.0300
16		0.0470	0.0479	0.0486	0.0494	0.0500	0.0592	0.0533	0.0415	0.0237
17		0.0294	0.0299	0.0302	0.0306	0.0309	0.0355	0.0355	0.0296	0.0178
18		0.0153	0.0155	0.0156	0.0157	0.0158	0.0177	0.0177	0.0177	0.0118
19		0.0053	0.0053	0.0054	0.0054	0.0054	0.0059	0.0059	0.0059	0.0059