31701

ハミルトン閉路

3511　勝田宗平　3624 竹腰伸二　3638　森岡蒼　3639　山﨑海斗

要旨

私たちはグラフ理論の分野のハミルトン閉路について研究してきた。この閉路の存在を判定する条件を解明することがこの研究の本旨である。私たちはグラフの中でも 3 正則、3 連結、平面的、2 部という条件下においてハミルトン閉路が存在するという仮説を立てた。私たちはグラフにおける様々な定理を証明することでハミルトン閉路の条件について探った。そしてハミルトン閉路の判定方法を探求し、本旨につながるグラフの法則性がわかった。

本文

１．目的

ハミルトン閉路の存在を判定する効率よく検証可能な必要十分条件を解明する。ここでは 3 正則、3 連結、平面的、2 部を満たすグラフがハミルトン閉路をもつのかどうかについて考える。この条件にした理由はこの 4 つの条件のうちの 3 つ、3 正則、3 連結、平面的、を満たすグラフと 3 正則、3 連結、2 部を満たすグラフには反例が挙げられたためである。(この反例については「４．条件の反例」で紹介する。)

２．研究の手順

・グラフ理論の基礎概念を学ぶために「グラフ理論入門　基本とアリゴリズム」を輪読する。
・グラフにおける様々な定理を証明し、グラフの性質や法則性を調べる。
・ハミルトン閉路の見つけ方、判定方法を調べる。

３．定義

グラフ・・・頂点とよばれる要素の集合 V(G)（頂点集合）と辺とよばれる 2 元集合の集合 E(G)（辺集合）からなるもの

本論文中のグラフは、頂点集合、辺集合がともに有限集合である有限グラフであるとする。また、2 頂点を結ぶ 2 本以上の辺（多重辺)、同一の頂点に接続する辺（ループ）を持つことのできる多重グラフ、各辺に向きを付けた有向グラフ、辺に重みを付けた重み付きグラフではないグラフとする。

位数・・・グラフ G における頂点数　|V(G)|と表す
サイズ・・・グラフ G における辺数　|E(G)|と表す
同型・・・2 つのグラフ G、H が本質的に同じ構造をもっていること
次数・・・グラフ G の頂点 V に接続している辺の本数　d(v)と表す

道・・・辺集合{{V_i、V_{i+1}}: i=1,2・・・,n−1}と頂点集合{V_1、V_2、・・・Vn}を持つグラフのこと(Pn と表す)

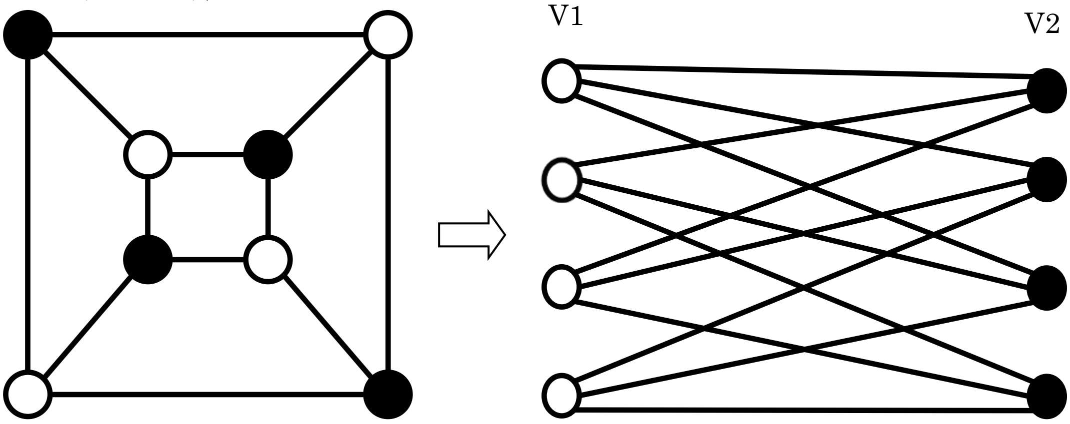
閉路・・・道の端点 V_1、Vn を結ぶ辺{Vn,V_1}を加えたグラフ

ハミルトン閉路・・・全頂点を一度ずつ通って同じ点に戻ってくる閉路

オイラー回路・・・全ての辺を一度だけ通り始点と終点が一致する回路のこと

2 部グラフ・・・グラフ G の頂点集合 V(G)を互いに素な部分集合 V_1、V_2 に分割し、V_1 の頂点同士、V_2 の頂点同士が隣接しないグラフ（例を図 1 に示す）

図 1. 2 部グラフ



3—正則グラフ・・・すべての頂点の次数が 3 のグラフ

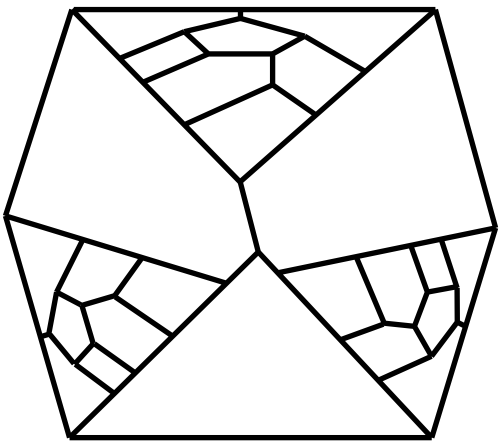
3—連結グラフ・・・グラフ G の任意の 2 頂点間に道が存在するグラフを連結グラフといい、その中でも 3 頂点とそれらの頂点に接続したすべての辺を消去したとき、非連結となるグラフのこと

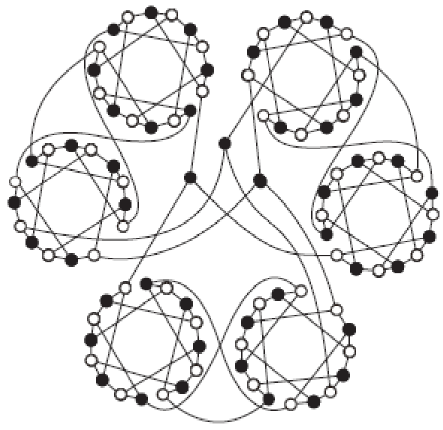
平面的グラフ・・・グラフ G の頂点集合 V(G)を結んだ E(G)が交差なく結べた時のグラフ G(同型を含む)

４．条件の反例

「１．目的」でも述べたように 3 正則、3 連結、平面的の条件を満たすグラフでハミルトン閉路をもたないグラフ（図 2）と 3 正則、3 連結、2 部の条件を満たすグラフでハミルトン閉路をもたないグラフ（図 3）が存在する。

図 2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　図 3





5．証明した定理

どのグラフにも 2 辺国、3 辺国、4 辺国、5 辺国のうち少なくとも 1 つは存在する

証明

平面グラフにおいて、n 辺で囲まれた領域を n 辺国と呼び、辺で囲まれた領域を F、辺を E、頂点を V とおく。
ここで、少なくとも 6 辺の領域のみで構成された領域があると仮定する。
E、F、V において次のような関係が成り立つ。

$$V \leqq \frac{2}{3}E \qquad\qquad F \leqq \frac{1}{3}E$$

V、F の最大の値$\frac{2}{3}E$、$\frac{1}{3}E$ をオイラーの多面体定理に代入すると、

$$\frac{1}{3}E - E + \frac{2}{3}E = 0$$

となり、F－E+V＝2 に矛盾する。これは、仮定が誤っていたためである。よってどのグラフにも 2 辺国、3 辺国、4 辺国、5 辺国のうち少なくとも 1 つは存在するといえる。

証明終

この証明ができたことにより 6 辺国以上のみで形成されるグラフを考えずにすむためかなり条件をしぼることができた。

6．ハミルトン閉路の判定方法・見つけ方

（Ⅰ）

ディラックの定理

G=(V,E)、|V|≧3 とする。全ての頂点 v∈V に対して、d(v)≧|V|/2 ならば G はハミルトン閉路を持つ。

オーレの定理

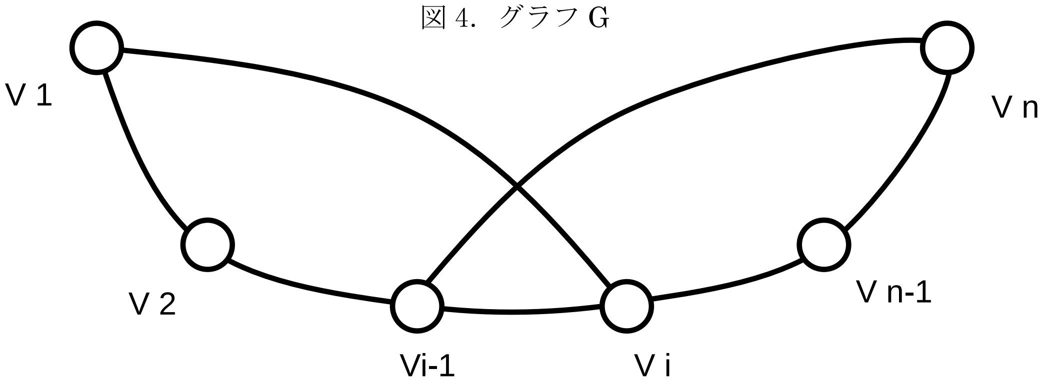
　G＝ (V,E)、|V|≧3 とする。隣接していない任意の 2 頂点 v、w について、
d(v)+ d(w)≧|V|ならば、G はハミルトン閉路を持つ。

オーレの定理が成り立てば「全ての頂点 v∈V に対して、d(v)≧|V|/2」であるグラフは「隣接していない任意の 2 頂点 v、w について、d(v)+ d(w)≧|V|」を満たす。つまりオーレの定理が成り立てばディラックの定理は成り立つ。そのためここでは、オーレの定理を証明する。

証明

グラフ G(図 3)が n 個(n≧3)の頂点を持ち、オーレの定理を満たすが、(ぎりぎり) ハミルトン閉路を持たないと仮定する。
このとき、グラフ G には $V_1 \to V_2 \to \cdot\cdot\cdot \to V_n$ となる道が存在する。
仮定から、$d(V_1)+d(V_n) \geqq n$
このときグラフ G には下のようなハミルトン閉路が存在するのでこれは矛盾している。
これは仮定が誤っていたためである。よって、オーレの定理が成り立つ。

図 4. グラフ G



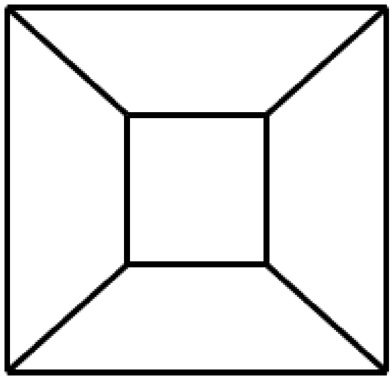
（Ⅱ）

辺入れ替えによる方法

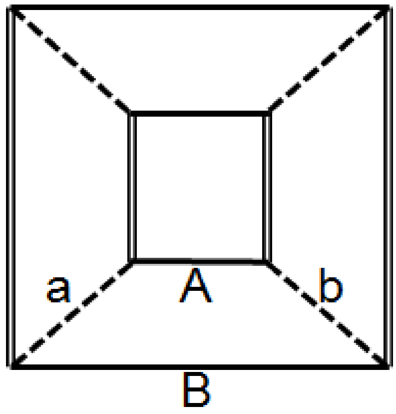
まず辺を隣り合う辺同士が違う色になるように 3 色（黒・白・点）に塗り分ける。次に任意の 2 色（黒・白）を選び交互にたどると、グラフのすべての頂点を通る閉路をいくつか作ることができる。これは 3 正則グラフであるため、2 色を交互にたどったものは必ず閉路になっているからである。さらにここで選択した 2 色のうちの任意の 1 色（白）と選択しなかった 1 色（点）をいくつか入れ替える。この場合、a と A,b と B という 2 組の辺を入れ替える。これにより、全ての頂点を通るひとつなぎの閉路をつくることができることがある。(図 5)

図 5

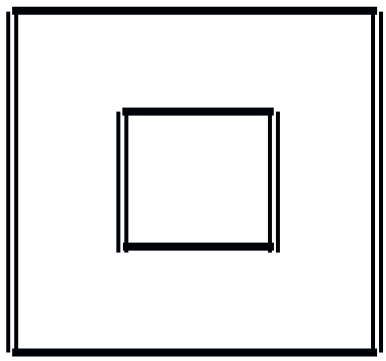
①



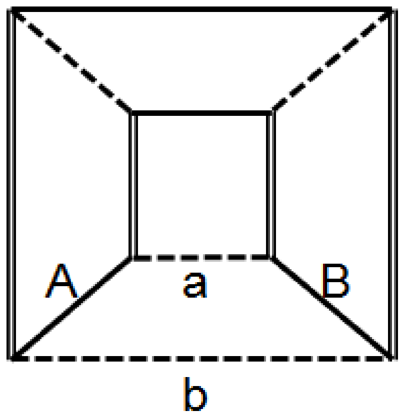
②



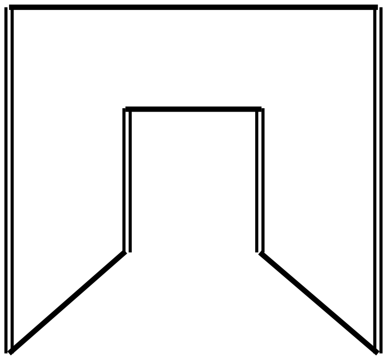
③



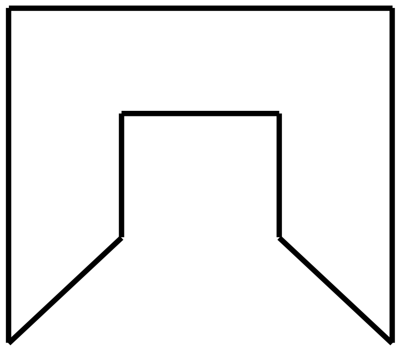
④



⑤



⑥



７．考察

この問題はいまだグラフ理論上未解決の問題であるため、証明に至るのは非常に難しいと考えられる。結果として３正則、３連結、平面的、２部という４つの条件でハミルトン閉路が存在するという結論に達することはできなかった。しかし、様々なグラフの性質や法則性を調べることによってハミルトン閉路の見つけ方やその判定方法がわかってきた。今後はさらに条件を絞り込んでハミルトン閉路が存在する条件について探っていきたいと考えている。

８．参考文献

・https://www.jiyu.ac.jp/images/college/kyoukakatei/s_kyoin/endo/vis2011.pdf

・http://www.aya.or.jp/~babalabo/HamiltonJ/Draft7J.html

・グラフ理論入門　基本とアルゴリズム　宮崎 修一　著

・四 色 問 題　ロビン・ウィルソン　著　茂木健一郎　訳