21712

生物の個体数の予測

2520 鈴木麻央　2610 加納稔也　2637 安江涼

要旨

　数学を用いて生物の生息数を予測する方法を研究する。生物の生息数を予測するには，微分方程式を用いることができるとわかった。微分方程式には解が求められないものも存在するが数値を代入することで微分方程式の近似解を見つけることができる。数値代入法の１つであるルンゲクッタ法で，作った微分方程式が解けることを確かめた。

１．目的

　未来を予測することに興味を持ち，数学を使って身近なことを予測することにした。予測をする方法のひとつである微分方程式を使って生物の個体数の変化を予測する。

２．使用した器具・装置など

・パーソナルコンピュータ
・Excel2016

３．研究・実験の手順

個体数の変化は$\frac{dN}{dt}=\varepsilon N$で表せる。

N…ある生物種の個体数
t…時間（年）
ε…単位時間当たりの自然増加率（/年）

例えばN＝100（匹），ε＝0.4 のとき
1 年後には 0.4×100＝40（匹）増加,
個体数は 140 匹になる。
もう一年経つと 0.4×140＝56（匹）増加,
個体数は 196 匹になる。

Ⅰ）立式する

Ⅱ）微分方程式$\frac{dN}{dt}=\varepsilon N$ を解く

Ⅱでは微分方程式を解くことができたが，式として答えが出ない微分方程式もある。その場合は数値を代入してグラフを描かなければならない。その方法のひとつであるルンゲクッタ法を使うことにした。

――――ルンゲクッタ法とは

ⅰ）初期値N（0），刻み幅の半分（$\frac{h}{2}$）で計算し仮のN（$\frac{h}{2}$）を求め，傾きk_1を出す。(図１)

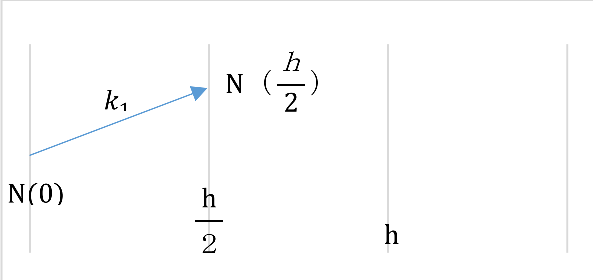


図１

ⅱ）初期値N（$\frac{h}{2}$），刻み幅の半分で計算し傾きk_2を出す。(図２)

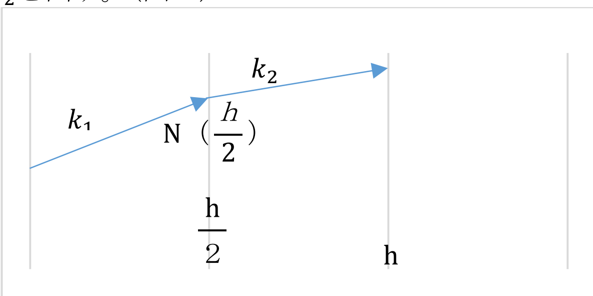


図２

ⅲ）初期値N（0），傾きk_2として新たなN（$\frac{h}{2}$）を求める。そのN（$\frac{h}{2}$）を用いて傾きk_3を出す。(図３)

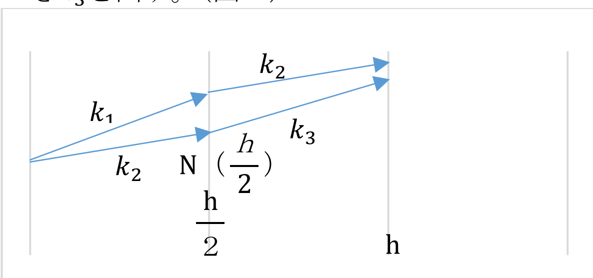


図３

ⅳ）初期値N（0），傾きk_3としてN（h）を求める。そのN（h）を用いて傾きk_4を求める。（図４）

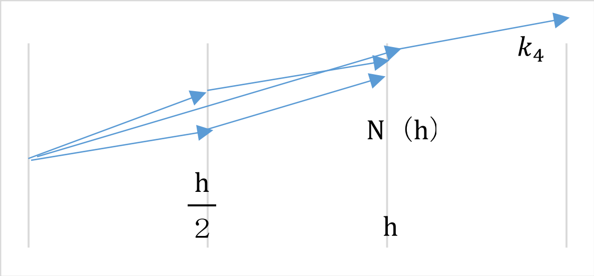


図４

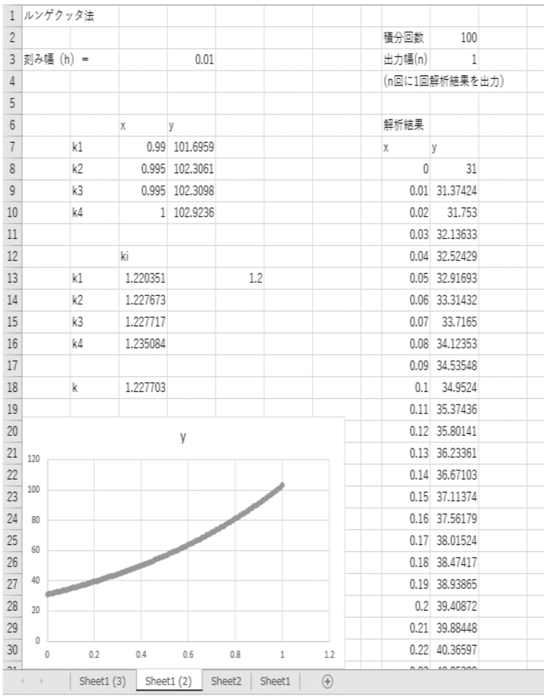
ｖ）最終的な傾きkを求める。

この手順で計算することによって，高い精度で数値を求めることができる。

Ⅲ）ルンゲクッタ法が使えることを検証する。
$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N$をルンゲクッタ法を用いて解く

$f(t,N) = \varepsilon N$ とする

ルンゲクッタ法のための計算くり返し用 VBA を作り，VBA をマクロとして登録する。(*)
マクロを実行し，解析結果をグラフにする。



1	ルンゲクッタ法						
2						積分回数	100
3	刻み幅（h）＝			0.01		出力幅(n)	1
4						(n回に1回解析結果を出力)	
5							
6			x	y		解析結果	
7		k1	0.99	101.6959		x	y
8		k2	0.995	102.3061		0	31
9		k3	0.995	102.3098		0.01	31.37424
10		k4	1	102.9236		0.02	31.753
11						0.03	32.13633
12			ki			0.04	32.52429
13		k1	1.220351		1.2	0.05	32.91693
14		k2	1.227673			0.06	33.31432
15		k3	1.227717			0.07	33.7165
16		k4	1.235084			0.08	34.12353
17						0.09	34.53548
18		k	1.227703			0.1	34.9524
19						0.11	35.37436
20						0.12	35.80141
21						0.13	36.23361
22						0.14	36.67103
23						0.15	37.11374
24						0.16	37.56179
25						0.17	38.01524
26						0.18	38.47417
27						0.19	38.93865
28						0.2	39.40872
29						0.21	39.88448
30						0.22	40.36597

図５　グラフと解析結果の例

t_0が h 増加するとy_0は k 増加する。
よって，$(t_1, N_1) = (t_0 + h, N_0 + k)$となる。
k は下式で計算する。

① $k_1 = h \cdot f(t_0, N_0)$

② $k_2 = h \cdot f\left(t_0 + \frac{h}{2}, N_0 + \frac{k_1}{2}\right)$

③ $k_3 = h \cdot f\left(t_0 + \frac{h}{2}, N_0 + \frac{k_2}{2}\right)$

④ $k_4 = h \cdot f(t_0 + h, N_0 + k_3)$

⑤ $k = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$

ここでは仮に
N_0 =31（万匹）
ε=1.2　（/年）として計算する。

(*) 入力したマクロ

```
Sub rungekutta()
'
'  ルンゲクッタ法
'マクロ記録日：2017/10/31
'

Dim kaisuu As Integer '積分回数
Dim n As Integer      '出力幅
Dim ii As Integer
kaisuu = Cells(2, 10)      積分回数を入力するセル
n = Cells(3, 10)           出力幅を入力するセル
h = Cells(3, 4)            刻み幅を入力するセル
col = 8
x0 = Cells(col, 9)
y0 = Cells(col, 10)        初期値を入力するセル

For i = 1 To kaisuu

  Cells(7, 3) = x0
  Cells(7, 4) = y0
  xn = x0 + h
  yn = y0 + Cells(18, 3)

  ii = i Mod n
  If ii = 0 Then
    col = col + 1
    Cells(col, 9) = xn
    Cells(col, 10) = yn
  End If
  x0 = xn
  y0 = yn

Next

    Application.Goto Reference:="rungekutta"
    ActiveWindow.SmallScroll Down:=-6

End Sub
```

Ⅳ）実際のデータをもとに検証する。

日本の天然記念物（講談社）の「伊豆諸島鳥島におけるアホウドリの増加」のグラフをもとにⅡの方法で検証した。上記の資料にはアホウドリの個体数は毎年約７％の割合で増加していると記述されていたのでε＝0.07, N_0＝30（1955 年の値）として，刻み幅 1 で計算した。

４．結果

Ⅰ）立式

時間tのときの個体数をNとすると，時間がΔtだけ経過したときの個体数の増加率は次の式で表せる。

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$

a（t）を個体数の増加率を一匹あたりに直したものとする。

$$a(t)=\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{N(t)\Delta t}$$

Δt 経過する間の増加率が一定の値 a だとすると，時間 Δt だけ経過した後の個体数は次の式で表せる。

$$N(t+\Delta t)=N(t)+aN(t)\Delta t=(1+a\Delta t)N(t)$$

$t=0$ のときの個体数をN_0とすると，
Δt だけ時間が経過するごとの個体数は

$$N(\Delta t)=(1+a\Delta t)N_0$$
$$N(2\Delta t)=(1+a\Delta t)N(t+\Delta t)=(1+a\Delta t)^2N_0$$
$$N(3\Delta t)=(1+a\Delta t)N(t+2\Delta t)=(1+a\Delta t)^3N_0$$

となり，時刻$n\Delta t$では
$N(n\Delta t)=(1+a\Delta t)^nN_0$となる。

このとき
$\log(1+a\Delta t)=b$ とすると，
$1+a\Delta t=e^b$だから，
$N(n\Delta t)=e^{bn}N_0$

個体数は，ある区切られた区間で変化するわけではないので増加率$a(t)$の代わりに，$\Delta t\to 0$としたときの極限，瞬間の変化率を考える，それをεとする。

$$\varepsilon=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{N(t)\Delta t}$$
$$=\frac{1}{N(t)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$
$$=\frac{1}{N(t)}\frac{dN}{dt}$$

つまり$\dfrac{dN}{dt}=\varepsilon N$

Ⅱ）

$\frac{dN}{dt}=\varepsilon N$を解く。

$$\frac{dN}{dt}=\varepsilon N$$
$$\frac{1}{N}.dN=\varepsilon dt$$

両辺を積分

$$\log|N|=\varepsilon t+c_1$$
$$|N|=e^{\varepsilon t+c_1}$$
$$|N|=e^{\varepsilon t}\cdot e^{c_1}$$

$\pm e^{c_1}$をCとする。

$$N=e^{\varepsilon t}\cdot C$$
$$N=C\cdot e^{\varepsilon t}$$

$t=0$　$N=N_0$ を代入する。

$$N_0=C\cdot e^{\varepsilon .0}$$
$$N_0=C\cdot 1$$
$$C=N_0$$

$$N=N_0e^{\varepsilon t}$$

$t\to\infty$での個体数はεの符号により変わる。

ⅰ）$\varepsilon<0$ のとき　$N\to 0$ 絶滅

ⅱ）$\varepsilon=0$ のとき　N_0のまま変化しない

ⅲ）$\varepsilon>0$ のとき　$N\to\infty$　無限に増加する

ただし，生物が生きられる環境には限界があり，ⅲ）のときは無限に増加するわけではない。

また, $N=N_0e^{\varepsilon t}$のグラフは図６のようになった。

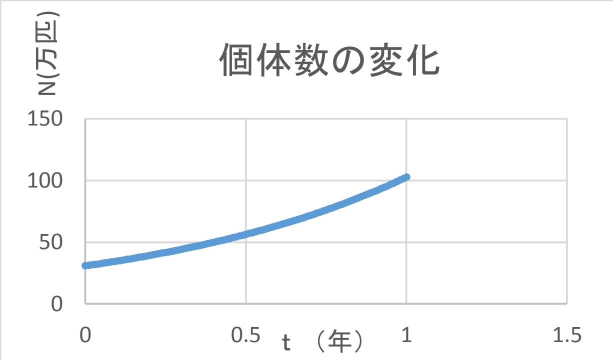
Ⅲ）

グラフは図７のようになった。

Ⅳ）

計算の結果は図８，９のようになった。

日本の天然記念物（講談社）にはアホウドリの推定総数は 600～650 羽（1993～1994 年）と書かれていたがマクロの実行結果は 1993 年が 429 匹, 1994 年が 460 匹となった。10 年で個体数が約 2 倍になるという記述とは一致した。



0	31	0.26	42.3508	0.51	57.16759	0.76	77.16818
0.01	31.37424	0.27	42.86207	0.52	57.85774	0.77	78.09978
0.02	31.753	0.28	43.37951	0.53	58.55621	0.78	79.04262
0.03	32.13633	0.29	43.9032	0.54	59.26312	0.79	79.99685
0.04	32.52429	0.3	44.43321	0.55	59.97856	0.8	80.96259
0.05	32.91693	0.31	44.96962	0.56	60.70264	0.81	81.93999
0.06	33.31432	0.32	45.51251	0.57	61.43546	0.82	82.9292
0.07	33.7165	0.33	46.06195	0.58	62.17713	0.83	83.93034
0.08	34.12353	0.34	46.61802	0.59	62.92775	0.84	84.94357
0.09	34.53548	0.35	47.18081	0.6	63.68743	0.85	85.96904
0.1	34.9524	0.36	47.75039	0.61	64.45628	0.86	87.00688
0.11	35.37436	0.37	48.32685	0.62	65.23442	0.87	88.05725
0.12	35.80141	0.38	48.91026	0.63	66.02195	0.88	89.12031
0.13	36.23361	0.39	49.50072	0.64	66.81898	0.89	90.19619
0.14	36.67103	0.4	50.09831	0.65	67.62564	0.9	91.28507
0.15	37.11374	0.41	50.70311	0.66	68.44204	0.91	92.38709
0.16	37.56179	0.42	51.31521	0.67	69.26829	0.92	93.50241
0.17	38.01524	0.43	51.9347	0.68	70.10452	0.93	94.6312
0.18	38.47417	0.44	52.56167	0.69	70.95084	0.94	95.77361
0.19	38.93865	0.45	53.19621	0.7	71.80738	0.95	96.92982
0.2	39.40872	0.46	53.83841	0.71	72.67426	0.96	98.09998
0.21	39.88448	0.47	54.48837	0.72	73.5516	0.97	99.28428
0.22	40.36597	0.48	55.14616	0.73	74.43954	0.98	100.4829
0.23	40.85328	0.49	55.81191	0.74	75.33819	0.99	101.6959
0.24	41.34648	0.5	56.48568	0.75	76.2477	1	102.9236
0.25	41.84562						

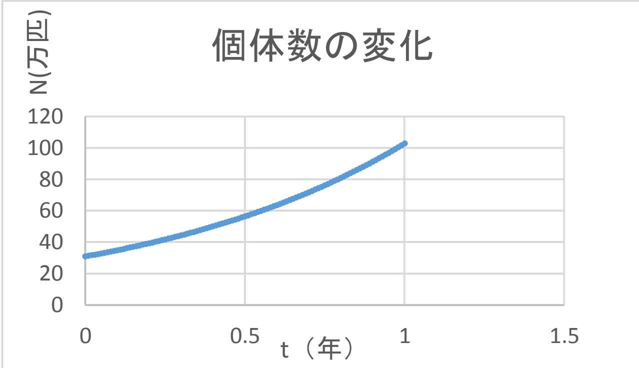
図６　$\mathrm{N} = \mathrm{N}_0 e^{\varepsilon t}$のグラフ

$\mathrm{N} = \mathrm{N}_0 e^{\varepsilon t}$に$\mathrm{N}_0$ =31

ε=1.2　を代入

いくつか数値を挙げると

t=0.１でN=34.95
t=0.２でN=39.41
t=0.３でN=44.43
t=0.４でN=50.10
t=0.５でN=56.49
t=0.６でN=63.69
t=0.７でN=71.81
t=0.８でN=80.96
t=0.９でN=91.29
t=1.０でN=102.92　となった。



	y						
0	31	0.26	42.3508	0.51	57.16759	0.76	77.16818
0.01	31.37424	0.27	42.86207	0.52	57.85774	0.77	78.09978
0.02	31.753	0.28	43.37951	0.53	58.55621	0.78	79.04262
0.03	32.13633	0.29	43.9032	0.54	59.26312	0.79	79.99685
0.04	32.52429	0.3	44.43321	0.55	59.97856	0.8	80.96259
0.05	32.91693	0.31	44.96962	0.56	60.70264	0.81	81.93999
0.06	33.31432	0.32	45.51251	0.57	61.43546	0.82	82.9292
0.07	33.7165	0.33	46.06195	0.58	62.17713	0.83	83.93034
0.08	34.12353	0.34	46.61802	0.59	62.92775	0.84	84.94357
0.09	34.53548	0.35	47.18081	0.6	63.68743	0.85	85.96904
0.1	34.9524	0.36	47.75039	0.61	64.45628	0.86	87.00688
0.11	35.37436	0.37	48.32685	0.62	65.23442	0.87	88.05725
0.12	35.80141	0.38	48.91026	0.63	66.02195	0.88	89.12031
0.13	36.23361	0.39	49.50072	0.64	66.81898	0.89	90.19619
0.14	36.67103	0.4	50.09831	0.65	67.62564	0.9	91.28507
0.15	37.11374	0.41	50.70311	0.66	68.44204	0.91	92.38709
0.16	37.56179	0.42	51.31521	0.67	69.26829	0.92	93.50241
0.17	38.01524	0.43	51.9347	0.68	70.10452	0.93	94.6312
0.18	38.47417	0.44	52.56167	0.69	70.95084	0.94	95.77361
0.19	38.93865	0.45	53.19621	0.7	71.80738	0.95	96.92982
0.2	39.40872	0.46	53.83841	0.71	72.67426	0.96	98.09998
0.21	39.88448	0.47	54.48837	0.72	73.5516	0.97	99.28428
0.22	40.36597	0.48	55.14616	0.73	74.43954	0.98	100.4829
0.23	40.85328	0.49	55.81191	0.74	75.33819	0.99	101.6959
0.24	41.34648	0.5	56.48568	0.75	76.2477	1	102.9236
0.25	41.84562						

図７
ルンゲクッタ法を用いたグラフと解析結果

N_0 =31，ε=1.2
刻み幅 0.01，出力幅 1 として計算

同様に数値を挙げると

t=0.１でN=34.95
t=0.２でN=39.41
t=0.３でN=44.43
t=0.４でN=50.10
t=0.５でN=56.49
t=0.６でN=63.69
t=0.７でN=71.81
t=0.８でN=80.96
t=0.９でN=91.29
t=1.０でN=102.92　となった。

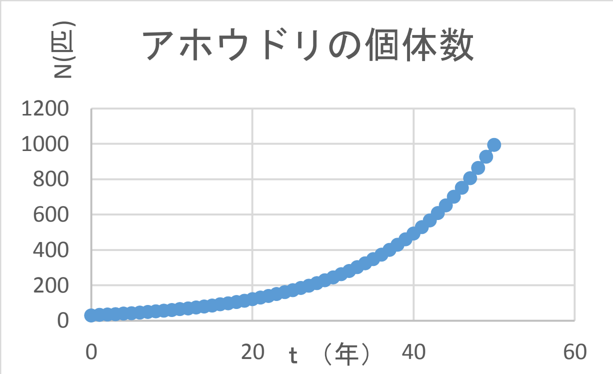


図８　アホウドリの個体数のグラフ

0	30		
1	32.17525	26	185.1557
2	34.50821	27	198.581
3	37.01034	28	212.9797
4	39.69389	29	228.4225
5	42.57202	30	244.985
6	45.65884	31	262.7484
7	48.96948	32	281.7998
8	52.52017	33	302.2326
9	56.32831	34	324.1469
10	60.41257	35	347.6502
11	64.79298	36	372.8577
12	69.491	37	399.893
13	74.52966	38	428.8885
14	79.93367	39	459.9864
15	85.72952	40	493.3391
16	91.94561	41	529.1103
17	98.61241	42	567.4751
18	105.7626	43	608.6217
19	113.4313	44	652.7517
20	121.656	45	700.0815
21	130.477	46	750.8431
22	139.9377	47	805.2854
23	150.0843	48	863.6752
24	160.9666	49	926.2987
25	172.638	50	993.4629

図９　計算結果の表

$N_0=30$，$\varepsilon=0.07$
刻み幅 0.01，出力幅 1 として計算

t＝0 は 1955 年

t＝38が 1993 年
t＝39が 1994 年

10 年ごとの個体数を比べると

t＝0 でN＝30
t＝10 でN＝60（2 倍）
t＝20 でN＝122（約 2 倍）
t＝30 でN＝245（約 2 倍）
t＝40 でN＝493（約 2 倍）
t＝50 でN＝993（約 2 倍）

５．考察

図６と図７を比べてみると，ルンゲクッタ法で描いたグラフは，実際に微分方程式を解いて得た方程式のグラフと等しいことが分かる。
よって，この微分方程式はルンゲクッタ法で解くことができるということが分かった。
ルンゲクッタ法を使うことで生物の生息数が予測できることが分かった。

Ⅳで本の数値と計算した数値が異なっていたのは，実際には個体数の増加を促進したり妨害したりする作用が働いたためと考えられる。具体的には以下の要因が考えられる。

〈増加を妨害〉
- 気候などの環境要因
- 餌の取り合いなどの競争
- 個体の流出
- 餌となる動物の減少
- 捕食される動物の増加
- 外来種による生態系の変化
- 生息環境の変化　等

〈増加を促進〉
- 気候などの環境要因
- 個体の流入
- 餌となる動物の増加
- 外来種による生態系の変化
- 捕食される動物の減少　等

６．今後の展望

Ⅱの結果で書いた通り$\varepsilon>0$のとき個体数は無限に増えるわけではないので，正確な予測をできるようにする。Kを環境収容力とすると，
$\frac{dN}{dt}=\varepsilon N\left(1-\frac{N}{K}\right)$ で表せることが分かった。
$N=K$の時，$\left(1-\frac{N}{K}\right)=0$なので$\frac{dN}{dt}=0$になり，個体数の増加が止まる。

例えば 2000 匹までしか生息できない環境（$K=2000$）で，$N=1000$，$\varepsilon=0.4$と仮定する。
1 年後には，
$0.4\times1000\times\left(1-\frac{1000}{2000}\right)=200$（匹）増加。
1200 匹になる。

さらに1年後には，

$$0.4 \times 1200 \times \left(1 - \frac{1200}{2000}\right) = 192$$（匹）増加。

1392匹になる。

このように，$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$では，生息数が限界数（K）に近づくにつれ増加が抑制される。この式を使うことでより現実に即した予測をすることが可能になると思われる。そのため，今後はこの式を立式してアホウドリの個体数やそのほかの動物の個体数について調べる。

また，考察で挙げたような個体数に影響を与える要因を微分方程式にして同様に計算をする。最終的には，予測をするもっとも正確な方法を導き，絶滅の予測をできるようにしたい。

7．参考文献・引用文献

・チャート式基礎からの数学Ⅱ+B （数研出版）
・Focus Z 数学Ⅱ+B　（啓林館）
・Focus Gold 数学Ⅲ　（啓林館）
・エディノート　数学Ⅲ　（啓林館）
・高等学校数学Ⅲ　（数研出版）
・日本の天然記念物　（講談社）
・環境基礎数学演習　2009
(http://web.agr.ehime-u.ac.jp/~kishou/Lecture/math2s/part1/Chap1_T.pdf)
・エクセルを用いたルンゲクッタ法による微分方程式の計算
(http://godfoot.world.coocan.jp/rungekutta.htm)
・Euler法-[物理のかぎしっぽ]
(http://hooktail.org/computer/index.php?Euler%CB%A1)
・Runge-Kutta法-[物理のかぎしっぽ]
(http://hooktail.org/computer/index.php?Runge-Kutta%CB%A1)

・５章　微分方程式
(http://www.math.s.chibau.ac.jp/~yasuda/Chiba/Lec/kb2009-5.pdf)
・生きものの数学
(http://www.b.s.osakafu-u.ac.jp/~tnamba/HokusetsuSanda2004.pdf)
・日本の人口をシミュレートしてみる
(http://hidekih.cocolog-nifty.com/Move_Data/Japan_Population_Simulation_090327.pdf)

謝辞

この研究を進めるにあたり琉球大学理学部の久保田康裕教授には個体数の解析手順についてご指導いただきました。この場を借りて感謝申し上げます。