21711

ベイズ統計学によるポーカーの必勝法

2505　大野敦士　　2534　三上奈桜　　2605　井端千尋

要旨

ベイズ統計学を用いて，ポーカーに勝ったとき，1回前にどのような操作をしていたのか確率を求めながら，勝つための最善の手(必勝法と呼ぶ)を導出した。通常のポーカーのルールを用いると確率導出が複雑になると考え，最初に引くカードの枚数を3枚にする等ルールを単純化した「単純ポーカー」の必勝法を求めた。その結果,「単純ポーカー」では，ノーペアにおいては1枚，ワンペアにおいてはペアを崩さず1枚交換し，スリーカードにおいては交換しないことが必勝法だと結論づけた。今後，この必勝法の検証を行うとともに，通常のルールのポーカーの必勝法に拡張する。

1. 目的

数学を用いて日常的な課題を解決したいと考え，ベイズ統計学を用いてポーカーに勝ったとき，どのような操作をしていたのか原因の確率を求め，確率的にポーカーの必勝法を導出する。

2. 定義とルール

「必勝法」とは，自分が持っているカードの役に対して，勝利のため確率的に最善と考えられる操作(カードの交換をすること)を行うことと定義する。また，ポーカーにはいくつかのルールがあるが，この研究ではドローポーカーの必勝法について求める。

ドローポーカーとは，以下のようなルールで行うトランプのゲームである。

まず，参加者全員にカードを5枚ずつ配る。カードの組み合わせにより，同じ数字のカードが1組のワンペア，同じ数字のカードが3枚のスリーカード等の役がある。カードが配られた後，参加者はより強い役をつくることを目的にして，任意の枚数手札を交換する。その後，ほかの参加者とカードを見せ合い，最も強い役を持っていた人が勝利となる。

3. 使用した道具・ソフト

・パーソナルコンピューター

・Excel2016

4. 方法

(1)ベイズ統計学について学ぶ

(2)確率的にポーカーの必勝法を求める

(3)必勝法の検証を行う

5. 手順

(1)ベイズ統計学について学ぶ

ベイズ統計学のもととなるベイズの定理(④)は以下のように証明される。

〈証明〉

確率の乗法定理より

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A) \quad \cdots ①$$

また，同様に

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B) \quad \cdots ②$$

①，②より

$$P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B) \quad \cdots ③$$

$P(B)\neq 0$として，

$$P(A|B)=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)} \quad \cdots ④$$

(終)

実際にベイズの定理を使うときには，④をより一般化させたベイズの展開公式(⑤)を用いる。

$$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B|A_k)\cdot P(A_k)} \quad \cdots ⑤$$

⑤について証明する。

〈証明〉
④は，図 1 の着色部の確率を求めている。

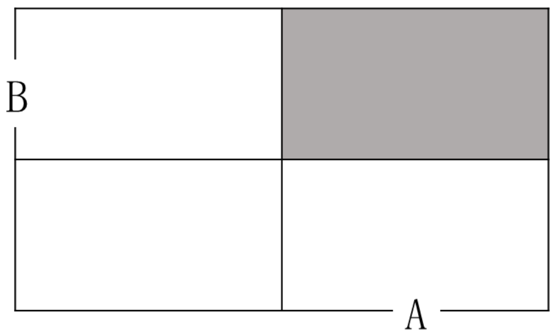

図 1　④の求めている部分

ここで，複数の事象 A が起こることを考えると，図 1 は図 2 のように変形できる。

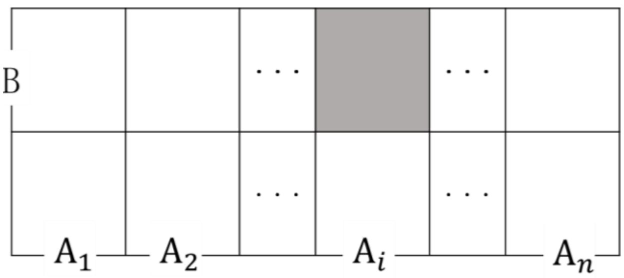

図 2　複数の事象 A が起こるとき

このとき，④の分母について，図 2 より，

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) = \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k) \quad \cdots ⑥$$

⑤の分子について，求める着色部は$P(Ai \cap B)$なので，確率の乗法定理より，

$$P(Ai \cap B) = P(Ai) \cdot P(B|Ai) \quad \cdots ⑦$$

⑥，⑦は⑤の分母および分子に等しい。
ゆえに，⑤は成立。　　　　　　　　　（終）

　ベイズ統計学の特徴として，
Ⅰ理由不十分の原則が使えること
Ⅱ確率の更新ができること
Ⅲ結果からその原因が考察できること
という 3 点があり，ポーカーの必勝法を求めるために最適だと考えた。
　以上 3 点の特徴や，ポーカーの必勝法を求めるうえでの利用法について説明する。

　理由不十分の原則は，確率分布が離散型一様分布になっていると仮定して，事前確率がわからないときには，それぞれの事象が起こる確率を等しく設定するという原則である。
　確率の更新とは，新しいデータが得られたときに，事前確率を事後確率に変化させるものである。新しいデータが得られたときに，既存のデータと組み合わせることで，より確からしい確率を導出することが可能である。
　また，結果から原因を考察することで，ポーカーに勝ったという結果が生じたときに，どのような操作をしていたかという原因を求められる。これを用いることで，必勝法が導出できる。

(2)確率的にポーカーの必勝法を求める
(A)「単純ポーカー」のルール設定
　確率の導出の利便性から，ポーカーのルールを単純化した「単純ポーカー」についての必勝法をまずは求める。その後，一般的なポーカーに拡張する。
　「単純ポーカー」のルールを以下のように定める。
・使用するカードはジョーカーを含まない 52 枚。
・最初に山札から引く枚数は 3 枚。
・手札を見て，任意の枚数交換する。ここで捨てたカードは再び戻ってこないものとする。
・役は，ノーペア(同数字のカードなし)，ワンペア(同数字のカード 2 枚)，スリーカード(同数字のカード 3 枚)とし，後に書いてあるものほど強いとし，相手よりも強い役を持っていれば勝ちとする。
・数字による強さは考えず，相手と自分の役が同じときは引き分けとする。
・自分と相手の使用する山札は異なるとする。
・相手は手札を交換しないものとする。
　以上のルールをもとに，確率を導出する。確率の導出には，ベイジアンネットワークを用いる。また，ベイズの定理を用いて，結果から原因を考察するためには，原因があり結果が起こる確率が導出されていることが必要である。そのため，ま

ずはその確率を導出する。

(B)「単純ポーカー」の確率導出

ポーカーを行ううえで，自分の最初の役については変えることは不可能である。そこで,「単純ポーカー」について，自分の最初の役によって

(ⅰ)自分の最初の役がノーペアのとき

(ⅱ)自分の最初の役がワンペアのとき

(ⅲ)自分の最初の役がスリーカードのとき

の 3 通りに場合分けし，確率を導出し，必勝法を考察する。

確率導出においては一部で Excel を利用する。また，確率は小数で導出し，無限小数となった場合は，小数点以下 5 桁目を四捨五入し，小数点以下 4 桁の小数で表現する。

なお，場合分けに関わらない共通の確率は以下の通り。

表 1　共通の確率導出

	分子立式	分母立式	結果
P(A)	$1-\{P(B)+P(C)\}$		0.8282
P(B)	※1	${}_{52}C_3$	0.1694
P(C)	${}_{13}C_1 \times {}_4C_3$	${}_{52}C_3$	0.0024
P(α)	P(A)に同じ		0.8282
P(β)	P(B)に同じ		0.1694
P(γ)	P(C)に同じ		0.0024

※1 ${}_{13}C_1 \times {}_4C_2 \times {}_{48}C_1$

A…自分の最初の役がノーペア

B…自分の最初の役がワンペア

C…自分の最初の役がスリーカード

α…相手がノーペア　β…相手がワンペア

γ…相手がスリーカード

また，勝つ確率，すなわち P(W)は次のようになる。

$P(W)=P(b\cap\alpha)+P(c\cap\alpha)+P(c\cap\beta)$　・・・⑧

a…交換後ノーペア　b…交換後ワンペア

c…交換後スリーカード

なお，今後特に断りのない限り，表 1 及び⑧と同様の記号を用いるものとする。

(ⅰ)自分の最初の役がノーペアのとき

自分の最初の役がノーペアであるとき，ベイジアンネットワークは図 3 のようになる。

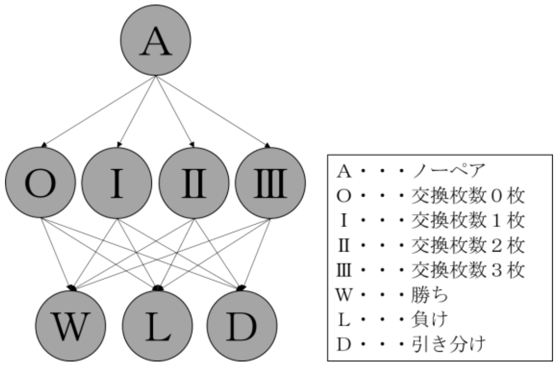

図 3　ベイジアンネットワーク(自分の最初の役がノーペアのとき)

確率については表 2 のようになる。

表 2　ノーペア確率導出

	分子立式	分母立式	結果
P(O)	理由不十分の原則		0.2500
P(Ⅰ)	理由不十分の原則		0.2500
P(Ⅱ)	理由不十分の原則		0.2500
P(Ⅲ)	理由不十分の原則		0.2500
P(a|O)	1	1	1.0000
P(a|Ⅰ)	${}_{43}C_1$	${}_{49}C_1$	0.8776
P(a|Ⅱ)	※1	${}_{49}C_2$	0.1454
P(a|Ⅲ)	※2	${}_{49}C_3$	0.0149
P(b|O)	0	${}_{49}C_0$	0.0000
P(b|Ⅰ)	※3	${}_{49}C_1$	0.2449
P(b|Ⅱ)	※4	${}_{49}C_2$	0.1071
P(b|Ⅲ)	※5	${}_{49}C_3$	0.0129
P(c|O)	0	${}_{49}C_0$	0.0000
P(c|Ⅰ)	0	${}_{49}C_1$	0.0000
P(c|Ⅱ)	${}_3C_2 \times 3$	${}_{49}C_2$	0.0077
P(c|Ⅲ)	※6	${}_{49}C_3$	0.0027

※1 $3\times({}_{10}C_1 \times {}_4C_1)+{}_9C_1 \times {}_4C_1+{}_3C_1+{}_3C_1 \times {}_3C_1$

※2 ${}_{10}C_1 \times {}_4C_1 + {}_9C_1 \times {}_4C_1 + {}_8C_1 \times {}_4C_1 + {}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_2C_1 \times {}_3C_1 + {}_{10}C_1 \times {}_4C_1 + {}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_{10}C_1 \times {}_4C_1 + {}_9C_1 \times {}_4C_1$

※3 ${}_2C_1 \times {}_3C_1 \times 2$

※4 ${}_{10}C_1 \times {}_4C_2 + {}_3C_1 \times 48 + {}_3C_2 + {}_3C_2$

※5 ${}_{10}C_1 \times {}_4C_2 + {}_9C_1 \times {}_4C_1 + ({}_3C_2 + {}_{10}C_1 \times {}_4C_1) \times 3 + {}_3C_1 \times {}_3C_2 + {}_3C_1$

※6 ${}_{10}C_1 \times {}_4C_3 + {}_3C_1 \times {}_3C_3 \times 3$

ノーペアにおいて,

$P(b) = P(O)P(b|O) + P(\mathrm{I})P(b|\mathrm{I}) + P(\mathrm{II})P(b|\mathrm{II}) + P(\mathrm{III})P(b|\mathrm{III})$ ・・・⑨

$P(c) = P(O)P(c|O) + P(\mathrm{I})P(c|\mathrm{I}) + P(\mathrm{II})P(c|\mathrm{II}) + P(\mathrm{III})P(c|\mathrm{III})$ ・・・⑩

であるから，⑧より，

$P(W) = P(b \cap \alpha) + P(c \cap \alpha) + P(c \cap \beta)$

$= P(b)P(\alpha) + P(c)P(\alpha) + P(c)P(\beta)$

$= 0.0782$ ・・・⑪

ベイズの定理より，

$P(操作|W) = \frac{P(操作)P(W|操作)}{P(W)}$ ・・・⑫

$P(W|操作) = P(操作)\{P(b|操作)P(\alpha) + P(c|操作)P(\alpha) + P(c|操作)P(\beta)\}$ ・・・⑬

※⑫，⑬における「操作」とは，カードの交換枚数のことを指す。

⑫，⑬より，

$P(O|W) = \frac{0}{0.0782} = 0$ ・・・⑭

$P(\mathrm{I}|W) = \frac{0.0507}{0.0782} = 0.6483$ ・・・⑮

$P(\mathrm{II}|W) = \frac{0.0241}{0.0782} = 0.3082$ ・・・⑯

$P(\mathrm{III}|W) = \frac{0.0034}{0.0782} = 0.0435$ ・・・⑰

(ⅱ)自分の最初の役がワンペアのとき

自分の最初の役がワンペアであるとき，ベイジアンネットワークは図4のようになる。

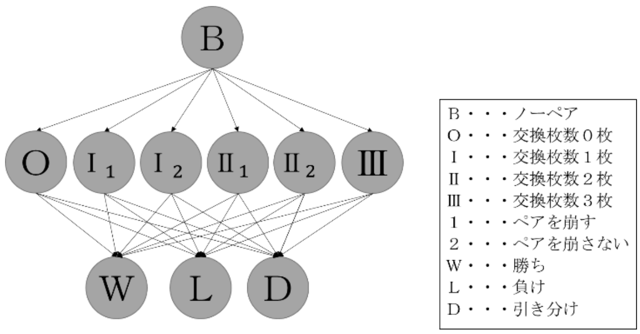

図 4　ベイジアンネットワーク(自分の最初の役がワンペアのとき)

なお,「ペアを崩す」,「ペアを崩さない」とは以下のような操作を指す。

例)1，1，2 がそろっているとき

交換枚数 1 枚のとき

ペアを崩す→1 を交換

ペアを崩さない→2 を交換

交換枚数 2 枚のとき

ペアを崩す→1 と 2 を交換

ペアを崩さない→1 と 1(1 を 2 枚)交換

確率については表 3 のようになる。

表 3　ワンペア確率導出

	分子立式	分母立式	結果
$P(O)$	理由不十分の原則		0.1667
$P(\mathrm{I}_1)$	理由不十分の原則		0.1667
$P(\mathrm{I}_2)$	理由不十分の原則		0.1667
$P(\mathrm{II}_1)$	理由不十分の原則		0.1667
$P(\mathrm{II}_2)$	理由不十分の原則		0.1667
$P(\mathrm{III})$	理由不十分の原則		0.1667
$P(a|O)$	0	${}_{49}C_0$	0.0000
$P(a|\mathrm{I}_1)$	${}_{44}C_1$	${}_{49}C_1$	0.8980
$P(a|\mathrm{I}_2)$	0	${}_{49}C_0$	0.0000
$P(a|\mathrm{II}_1)$	※1	${}_{49}C_2$	0.8801
$P(a|\mathrm{II}_2)$	※2	${}_{49}C_2$	0.2619
$P(a|\mathrm{III})$	$1 - \{P(b|\mathrm{III}) + P(c|\mathrm{III})\}$		0.8263
$P(b|O)$	1	1	1.0000
$P(b|\mathrm{I}_1)$	${}_2C_1 + {}_3C_1$	${}_{49}C_1$	0.1020
$P(b|\mathrm{I}_2)$	${}_{47}C_1$	${}_{49}C_1$	0.9592
$P(b|\mathrm{II}_1)$	※3	${}_{49}C_2$	0.1386

$P(b\|\mathrm{II}_2)$	※4	${}_{49}C_2$	0.1743
$P(b\|\mathrm{III})$	※5	${}_{49}C_3$	0.1712
$P(c\|O)$	0	${}_{49}C_0$	0.0000
$P(c\|\mathrm{I}_1)$	0	${}_{49}C_1$	0.0000
$P(c\|\mathrm{I}_2)$	${}_2C_1$	${}_{49}C_1$	0.0408
$P(c\|\mathrm{II}_1)$	${}_2C_2$	${}_{49}C_2$	0.0009
$P(c\|\mathrm{II}_2)$	${}_3C_2$	${}_{49}C_2$	0.0026
$P(c\|\mathrm{III})$	※6	${}_{49}C_3$	0.0024

※1 $\frac{1}{2}\times({}_{44}C_1\times{}_{40}C_1+{}_{46}C_1\times{}_{42}C_1)$

※2 ${}_2C_1\times{}_{44}C_1+{}_{11}C_2\times{}_4C_1$

※3 ${}_2C_1\times{}_{47}C_1+{}_3C_2+{}_4C_2\times{}_{11}C_1$

※4 ${}_3C_1\times{}_{46}C_1+{}_2C_2+{}_{11}C_1\times{}_4C_2$

※5 ${}_2C_2\times{}_{47}C_1+{}_3C_2\times{}_{46}C_1+{}_{11}C_1+{}_4C_2\times{}_{45}C_1$

※6 ${}_3C_3+11\times{}_4C_3$

ワンペアにおいて，

$P(b)=P(O)P(b|O)+P(\mathrm{I}_1)P(b|\mathrm{I}_1)+P(\mathrm{I}_2)P(b|\mathrm{I}_2)+P(\mathrm{II}_1)P(b|\mathrm{II}_1)+P(\mathrm{II}_2)P(b|\mathrm{II}_2)+P(\mathrm{III})P(b|\mathrm{III})$ ・・・⑱

$P(c)=P(O)P(c|O)+P(\mathrm{I}_1)P(c|\mathrm{I}_1)+P(\mathrm{I}_2)P(c|\mathrm{I}_2)+P(\mathrm{II}_1)P(c|\mathrm{II}_1)+P(\mathrm{II}_2)P(c|\mathrm{II}_2)+P(\mathrm{III})P(c|\mathrm{III})$ ・・・⑲

であるから，⑧より，

$P(W)=P(b\cap\alpha)+P(c\cap\alpha)+P(c\cap\beta)$

$=P(b)P(\alpha)+P(c)P(\alpha)+P(c)P(\beta)$

$=0.3631$ ・・・⑳

よって，⑫，⑬より，

$P(O|W)=\frac{0.1381}{0.3631}=0.3803$ ・・・㉑

$P(\mathrm{I}_1|W)=\frac{0.0141}{0.3631}=0.0388$ ・・・㉒

$P(\mathrm{I}_2|W)=\frac{0.1392}{0.3631}=0.3834$ ・・・㉓

$P(\mathrm{II}_1|W)=\frac{0.0196}{0.3631}=0.0540$ ・・・㉔

$P(\mathrm{II}_2|W)=\frac{0.0245}{0.3631}=0.0675$ ・・・㉕

$P(\mathrm{III}|W)=\frac{0.0276}{0.3631}=0.0760$ ・・・㉖

(ⅲ) 自分の最初の役がスリーカードのとき

自分の最初の役がスリーカードであるとき，ベイジアンネットワークは図 5 のようになる。

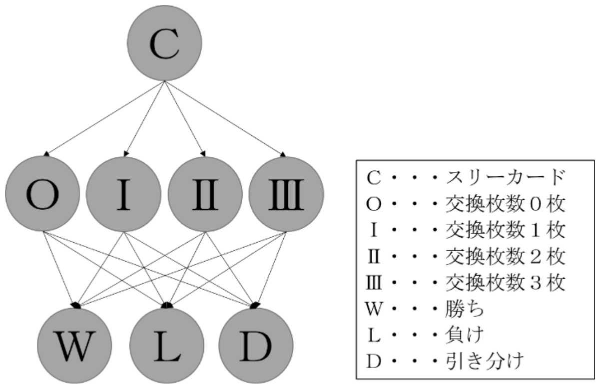

図 5　ベイジアンネットワーク (自分の最初の役がスリーカードのとき)

確率については表 4 のようになる。

表 4　スリーカード確率導出

	分子立式	分母立式	結果
$P(O)$	理由不十分の原則		0.2500
$P(\mathrm{I})$	理由不十分の原則		0.2500
$P(\mathrm{II})$	理由不十分の原則		0.2500
$P(\mathrm{III})$	理由不十分の原則		0.2500
$P(a\|O)$	0	${}_{49}C_0$	0.0000
$P(a\|\mathrm{I})$	0	${}_{49}C_1$	0.0000
$P(a\|\mathrm{II})$	${}_{48}C_2$	${}_{49}C_2$	0.9592
$P(a\|\mathrm{III})$	※1	${}_{49}C_3$	0.0118
$P(b\|O)$	0	${}_{49}C_0$	0.0000
$P(b\|\mathrm{I})$	${}_{48}C_1$	${}_{49}C_1$	0.9796
$P(b\|\mathrm{II})$	※2		0.0408
$P(b\|\mathrm{III})$	※3	${}_{49}C_3$	0.0102
$P(c\|O)$	1	${}_{49}C_0$	1.0000
$P(c\|\mathrm{I})$	1	${}_{49}C_1$	0.0204
$P(c\|\mathrm{II})$	0	${}_{49}C_2$	0.0000
$P(c\|\mathrm{III})$	${}_{12}C_1\times{}_4C_3$	${}_{49}C_3$	0.0026

※1 ${}_{12}C_1\times{}_4C_1+{}_{11}C_1\times{}_4C_1+{}_{10}C_1\times{}_4C_1+{}_{11}C_1\times{}_4C_1+{}_{10}C_1\times{}_4C_1+{}_1C_1$

※2 $1-\frac{{}_{48}C_2}{{}_{49}C_2}$

※3 ${}_1C_1\times{}_{12}C_1\times{}_4C_2+{}_{12}C_1\times{}_4C_2+{}_{11}C_1\times{}_4C_1$

スリーカードにおいて，

$P(b)=P(O)P(b|O)+P(\mathrm{I})P(b|\mathrm{I})+P(\mathrm{II})P(b|\mathrm{II})+P(\mathrm{III})P(b|\mathrm{III})$ ・・・㉗

$P(c) = P(O)P(c|O) + P(\mathrm{I})P(c|\mathrm{I}) + P(\mathrm{II})P(c|\mathrm{II}) + P(\mathrm{III})P(c|\mathrm{III})$ ・・・㉘

であるから，⑧より，

$P(W) = P(b \cap \alpha) + P(c \cap \alpha) + P(c \cap \beta)$

$= P(b)P(\alpha) + P(c)P(\alpha) + P(c)P(\beta)$

$= 0.4684$ ・・・㉙

よって，⑫，⑬より，

$P(O|W) = \frac{0.2494}{0.4684} = 0.5325$ ・・・㉚

$P(\mathrm{I}|W) = \frac{0.2079}{0.4684} = 0.4439$ ・・・㉛

$P(\mathrm{II}|W) = \frac{0.0084}{0.4684} = 0.0179$ ・・・㉜

$P(\mathrm{III}|W) = \frac{0.0027}{0.4684} = 0.0058$ ・・・㉝

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	[illegible]		[illegible]		[illegible]		相手		結果		
2	A	0.8282	O	0.25	a	1	α	0.8282	D	0.20705	
3		0.8282		0.25		1	β+γ	0.1718	L	0.04295	
4		0.8282	I	0.25	a	0.8776	α	0.8282	D	0.181707	
5		0.8282		0.25		0.8776	β+γ	0.1718	L	0.037693	
6		0.8282		0.25	b	0.2449	α	0.8282	W	0.050707	
7		0.8282		0.25		0.2449	β	0.1694	D	0.010372	
8		0.8282		0.25		0.2449	γ	0.0023	L	0.000141	
9		0.8282	II	0.25	a	0.1454	α	0.8282	D	0.030105	
10		0.8282		0.25		0.1454	β+γ	0.1718	L	0.006245	
11		0.8282		0.25	b	0.1071	α	0.8282	W	0.022175	
12		0.8282		0.25		0.1071	β	0.1694	D	0.004536	
13		0.8282		0.25		0.1071	γ	0.0023	L	6.16E-05	
14		0.8282		0.25	c	0.0077	α+β	0.9976	W	0.00192	
15		0.8282		0.25		0.0077	γ	0.0023	D	4.43E-06	

図 6　Excel での計算(一部・Excel では主に⑪⑳㉙における確率の導出を行った。)

(C)「単純ポーカー」必勝法の考察・ルールの検証

(ⅰ)自分の最初の役がノーペアのとき

⑭～⑰より，$P(\mathrm{I}|W)$のときの確率が最も大きい。このことから，自分の最初の役がノーペアのときは1枚交換することが必勝法だと考えられる。

(ⅱ)自分の最初の役がワンペアのとき

㉑～㉖より，$P(\mathrm{I}_2|W)$のときの確率が最も大きい。このことから，自分の最初の役がワンペアのときはペアを崩さず1枚交換(ペアになっているカード以外を交換)することが必勝法だと考えられる。

(ⅲ)自分の最初の役がスリーカードのとき

㉚～㉝より，$P(O|W)$のときの確率が最も大きい。このことから，自分の最初の役がスリーカードのときは交換しないことが必勝法だと考えられる。

(ⅳ)「単純ポーカー」のルールの検証

「単純ポーカー」においては，カードを3枚しか用いないルールの特性上，最初にワンペアができる確率が 0.1694 であり，通常のルールのポーカーでワンペアができる確率である 0.4226(『ポーカーの確率』より)に比べて非常に低くなっており，ワンペアができること自体がまれである。そのため，最も強い役のスリーカードにおいて，勝ったとき，1 枚交換した時の確率が高くなっている(㉛)のは，これが原因だと考えられる。

そのため，「単純ポーカー」のルールをより実際のポーカーのルールに近いものにして必勝法を求めることが必要だと考えられる。

6. 結論

「単純ポーカー」においては，自分の最初の役がノーペアのときは1枚，ワンペアのときはペアを崩さず1枚交換し，スリーカードのときは交換しないことが必勝法である。

7. 今後の展望

今後，求めた必勝法の有用性がどの程度なのかの検証を行う。

また，一般的なルールのドローポーカーにおける必勝法を求めるため，「単純ポーカー」のルールを拡張し，より実際のルールに近い条件で必勝法を求め，検証を行う。

8. 参考文献・引用文献

・『史上最強図解　これならわかる！ベイズ統計学』涌井良幸　涌井貞美　ナツメ社

・『Excel でスッキリわかるベイズ統計入門』涌井良幸　涌井貞美　日本実況出版社

・『結果から原因を推理する「超」入門ベイズ統計』石村貞夫　講談社

・『高等学校数学 A』数研出版

・『エディノート数学Ⅰ＋A』啓林館

・『ポーカーの確率』熊本国府高等学校

http://www.kumamotokokufu-h.ed.jp/kokufu/math/game_p.html