31603

円周率　π　探究

3535　森下佳祐　3615　後藤祐太朗　3639　和田晶雄

要旨

数学でよく用いられる円周率πについて、その求め方やさまざまな視点から考えた。そのために、πの定義について、基本的な知識を用いて、過去の数学者が考えた証明について理解を深めた。その証明とは、モンテカルロ法、ウォリスの公式、グレゴリー・ライプニッツの公式、そして、ビュホンの針の４つの証明である。特に後者の２つについては、さらなる理解のために実験も行った。グレゴリー・ライプニッツの公式では、同じように数列を用いた公式との、収束の速さについて、プログラミングによって、比較した。ビュホンの針については、２つの対照実験を行った。１つ目は、投げる棒の幅を変えて、幅が細くて一様な棒の方が適していることがわかった。２つ目は、投げる本数におけるπの近似値の正確性を検証した。そのために、100 本、200 本、500 本の３種類について求めたπの平均値と分散を出した。比較的、回数の多いものの方がπの近似値が求められ、散らばりが小さいことがわかった。

１．目的

円周率という超越数の求め方に対して、確率や数列などを用いて、多角的な視野で考える。

２．使用した器具・装置

つまようじ　コンピューター　紙　鉛筆

３．手順

Ⅰ　円周率πにおける定義について考える。

Ⅱ　証明を理解する。

証明１　モンテカルロ法

証明２　ビュホンの針

証明３　ウォリスの公式

証明４　グレゴリー・ライプニッツの公式

Ⅲ　証明２、証明４における実験を行う。

実験１　グレゴリー・ライプニッツなどの数列を用いた公式の実証

10 個の公式におけるプログラミングを調べ、グラフ化し比較する。

実験２　ビュホンの針の実証

①　投げる棒の幅におけるπの近似の誤差の実験

鉛筆（9mm）　つまようじ（2mm）で、100 本×10 セットにおけるπの平均値と分散をそれぞれ求め、比較する。

② 試行回数におけるπの近似の正確性

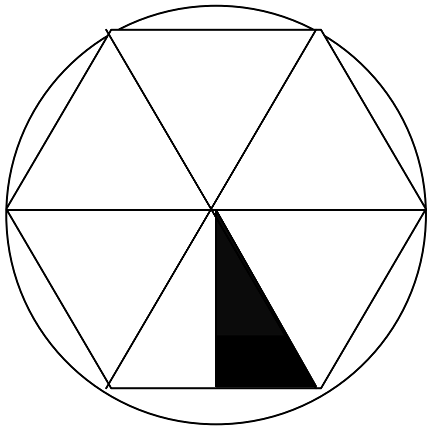
100本×10セット 200本×10セット 500本×10セット におけるπの平均値と分散をそれぞれ求め、比較する。

πの定義（円周＝円周率×直径）

一辺がaの正n角形 $(n \geq 3)$

外接する円の半径rと仮定する

図に示した三角形に対して以下の等式が成り立つ



$$\frac{a}{2} = r \sin\frac{\pi}{n}$$

周の長さについて辺はn本あるので以下の等式が成り立つ

$$l = na = 2nr\sin\frac{\pi}{n}$$

よって

$$\pi \fallingdotseq \frac{l}{2r} = \frac{2nr\sin\frac{\pi}{n}}{2r} = n\sin\frac{\pi}{n}$$

実際にnに値を代入すると

n	π
3	2.60
4	2.82
6	3.00
9	3.08
18	3.12
90	3.14

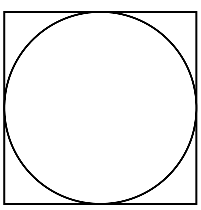
証明１　モンテカルロ法

半径rの円に外接する一辺２rの正方形を描く。

大量の小さな粒（ごまetc）を満遍なく、まくとする。

円にn個、正方形N個入ったとする。

もし、面積に比例して、入った粒の個数が変化するとするなら、

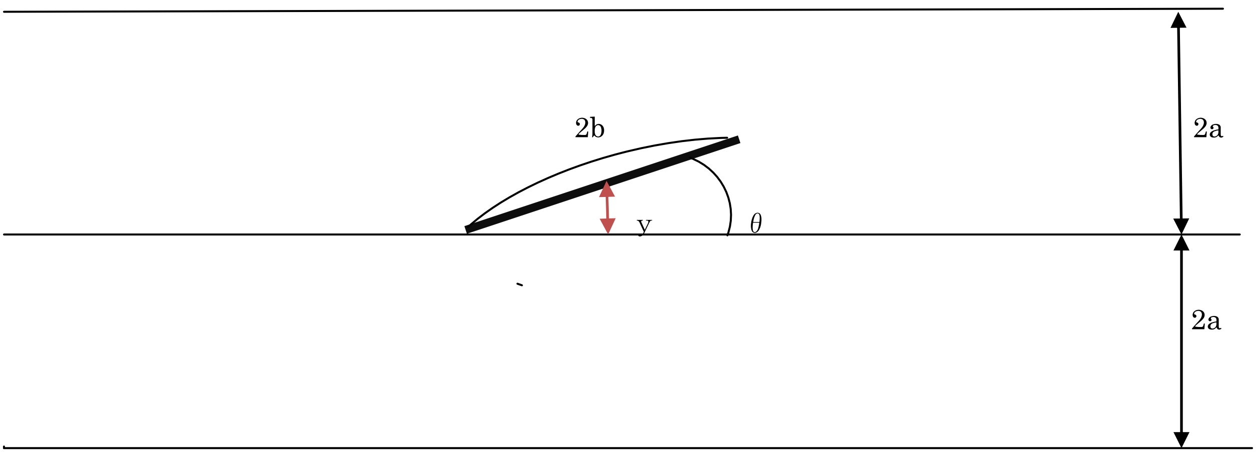


$$\pi r^2 : (2r)^2 = n : N$$

$$\pi = \frac{4n}{N}$$

証明２　ビュホンの針

間隔 2a で平行線を描き、その上から長さ 2b の針を無作為にばらまく。
平行線と重なった針の本数の割合 r から円周率 π の近似値を求める。
ただし、a>b とします。



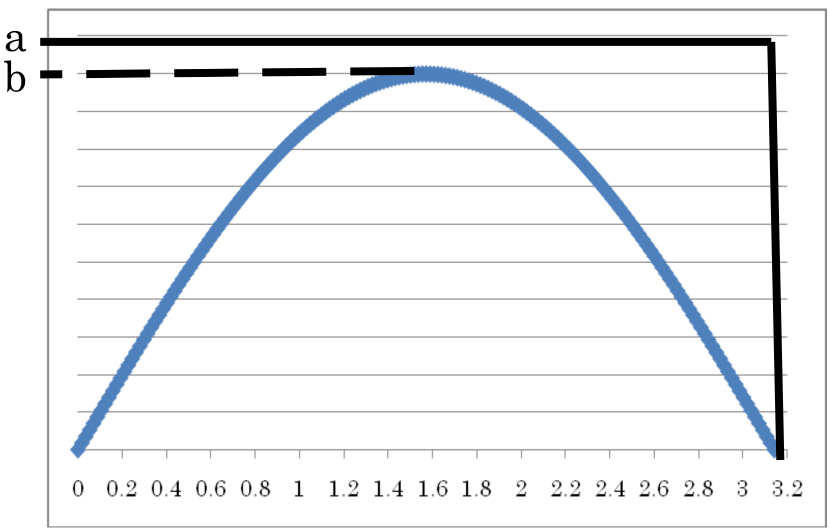
針が平行と重なる確率は $P = \dfrac{2b}{a\pi}$

なぜなら、針と平行線のなす角を θ 、針の中心と最も近い平行線との距離を y とすると、
$y \le b\sin\theta$ が成り立つとき、針は平行線と重なるからである。
ここで、$0 \le \theta \le \pi$、$0 \le y \le a$ である。

よって、

$$P = \frac{\int_0^\pi b\sin\theta d\theta}{a\pi}$$

$$= \frac{2b}{a\pi}$$



$\pi \fallingdotseq r$ なので、

$$r=\frac{2b}{a\pi}$$

よって、

$$\pi=\frac{2b}{ar}$$

証明３　ウォリスの公式

n を 0 以上の整数として、

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$$ とおく。

$$J_0=\frac{\pi}{2} \qquad J_0=1 \qquad \cdots(a)$$

$n\geq 2$ として、部分積分を行う。

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin xdx=\left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)dx=(n-1)\left(J_{n-2}-J_n\right)$$

となるので、結局

$$J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}$$

を得ます。よって、(a)を使って

（１）　$J_{2n}=\dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{2n-3}{2n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

（２）　$J_{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}\cdot\dfrac{2n-2}{2n-1}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1$

がわかります。まず、

（３）　$\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{J_{2n+1}}{J_{2n}}=\dfrac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\dfrac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\dfrac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$

となります。

変数 x が $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ であるときは、$0\leq\sin x\leq 1$ なので

$0\leq\sin^{2n+1}x\leq\sin^{2n}x\leq\sin^{2n-1}x\leq 1$ がわかります。

よって、$0\leq J_{2n+1}\leq J_{2n}\leq J_{2n-1}\leq 1$ となるので、

$$1\leq\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}\leq\frac{J_{2n-1}}{J_{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n}\to 1\left(n\to\infty\right)$$

がわかり、はさみうちの原理で、

（4）　　　$$\lim_{n\to\infty}\frac{J_{2n+1}}{J_{2n}}=1$$

よって、（3）（4）より、

（5）　$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\quad,\quad \text{or}\quad \frac{2}{\pi}=\prod_{n-1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)$$

$$J_{2n}J_{2n+1}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}=\frac{\pi}{4n+2}$$

$$\sqrt{n}J_{2n+1}\sqrt{\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}}=\sqrt{n}\sqrt{J_{2n}J_{2n+1}}=\sqrt{\frac{\pi}{4+\frac{2}{n}}}$$

となるので、

（6）　$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ J_{2n+1}$$

がわかります。ここで、

$$J_{2n}J_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}=\frac{(2n)(2n)}{(2n+1)(2n)}\cdot\frac{(2n-2)(2n-2)}{(2n-1)(2n-2)}\cdots\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

を使うと、（6）より、

$$\sqrt{\pi}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}J_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{2n+1}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\,{}_{2n}C_n}$$

以上より、次の定積分

$$I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$$

の値を計算すると、変数変換$t=\cos x$を使って、

$$J_{2n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 x\right)^n\sin x dx=\int_0^1\left(1-t^2\right)^n dt$$

同様に、変数変換$t=\cos x$を使って、

$$J_{2n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(1+\cot^2 x\right)}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}dt$$

となり、さらに、変換変数$x=\sqrt{n}t$を使って、

$$I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{n}\int_0^{\infty}e^{-nt^2}dt$$

ここで、

$$1-x^2\le e^{-x^2}\qquad x\in[-1,1]\qquad e^{-x^2}\le\frac{1}{1+x^2}\qquad x\in\Re$$

が成り立つことを確認する。これより、

$$\sqrt{n}\left(1-x^2\right)^n \le \sqrt{n}e^{-nx^2} \qquad x\in[-1,1] \qquad \sqrt{n}e^{-nx^2} \le \frac{\sqrt{n}}{\left(1+x^2\right)^n} \qquad x\in\Re$$

かつ

$$\sqrt{n}\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx \le \sqrt{n}\int_0^1 e^{-nx^2} \le \sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nx^2}dx \le \int_0^\infty \frac{\sqrt{n}}{\left(1+x^2\right)^n}dx$$

を得るので、

$$\sqrt{n}J_{\mathrm{2n+1}} \le I \le \sqrt{n}J_{\mathrm{2n\text{-}2}}$$

がわかります。よって、（４）（６）より

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}J_{\mathrm{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}J_{\mathrm{2n\text{-}2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}J_{\mathrm{2n+1}}\frac{J_{\mathrm{2n\text{-}2}}}{J_{\mathrm{2n+1}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

なので、はさみうちの原理より

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

証明４　グレゴリー・ライプニッツの公式

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

これを変形させて、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k-1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4} \qquad \cdot\cdot\cdot\text{(a)}$$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n} xdx$ とする。

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2} xdx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^{2n} x\right)\left(\tan^2 x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^{2n} x\right)\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^{2n} x}{\cos^2 x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n} x\ d$$

よって、$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n} xdx$ は、I_n のことだから、

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^{2n} x}{\cos^2 x}dx - I_n$$

$$I_{n+1}+I_n=\left[\frac{1}{2n+1}\tan^{2n}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2n+1}$$

$$n=k-1$$

$$I_k+I_{k-1}=\frac{1}{2k-1}$$

（a） より、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(I_k+I_{k-1}\right)=\frac{\pi}{4}$$

左辺 $=\lim_{n\to\infty}\left\{(I_1+I_0)-(I_2+I_1)+(I_3+I_2)\cdots+(-1)^{\mathrm{n}\text{-}1}(I_n+I_{n+1})\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{I_0+(-1)^{n-1}I_n\right\}$$

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^0dx \quad =\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx \quad =\frac{\pi}{4}$$

挟み撃ちの原理より、$(n\to\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}0\le I_n\le\left(I_n+I_{n+1}\right)$$

$$0\le I_n\le 0$$

よって、

$$\lim_{n\to\infty}\left\{I_0+(-1)^{n-1}I_n\right\}=\frac{\pi}{4}$$

4　実験

実験１

10 個の数列は、以下のものである。これら 10 個の数列について、プログラミングをたてた。

① $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdot\cdot\cdot=\frac{\pi}{4}$

② $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{9\cdot11}+\frac{1}{13\cdot15}+\frac{1}{17\cdot19}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{(4n-3)(4n-1)}=\frac{\pi}{2\cdot4}$

③ $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

④ $$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdot\cdot\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

⑤ $$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\cdot\cdot\cdot\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{24}$$

⑥ $$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdot\cdot\cdot(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

⑦ $$\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdot\frac{8\cdot8}{7\cdot9}\cdot\frac{10\cdot10}{9\cdot11}\cdot\cdot\cdot\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}$$

⑧ $$\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdot\frac{9\cdot9}{8\cdot10}\cdot\frac{12\cdot12}{11\cdot13}\cdot\frac{15\cdot15}{14\cdot16}\cdot\cdot\cdot\frac{(3n)(3n)}{(3n-1)(3n+1)}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

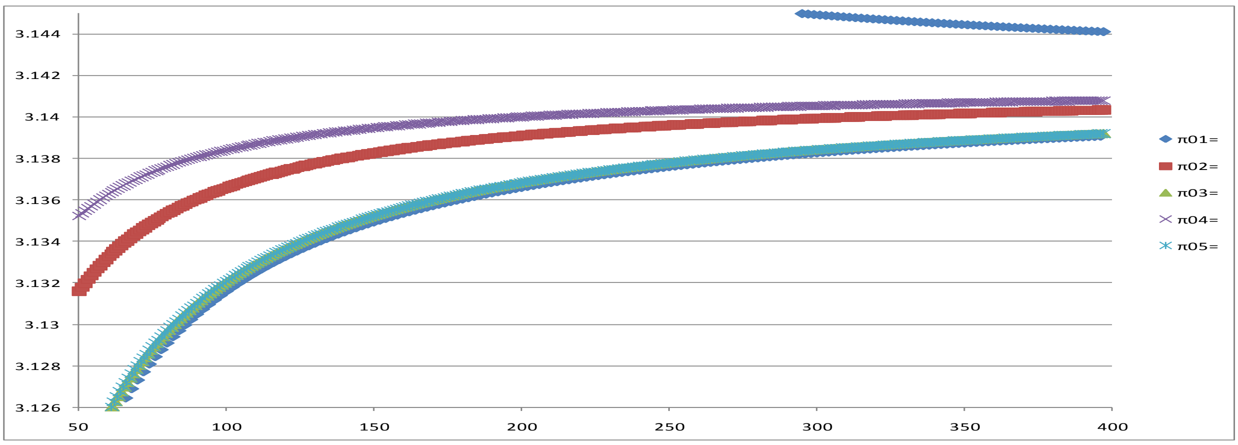
⑨ $$\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{8\cdot8}{7\cdot9}\cdot\frac{12\cdot12}{11\cdot13}\cdot\frac{16\cdot16}{15\cdot17}\cdot\frac{20\cdot20}{19\cdot21}\cdot\cdot\cdot\frac{(4n)(4n)}{(4n-1)(4n+1)}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

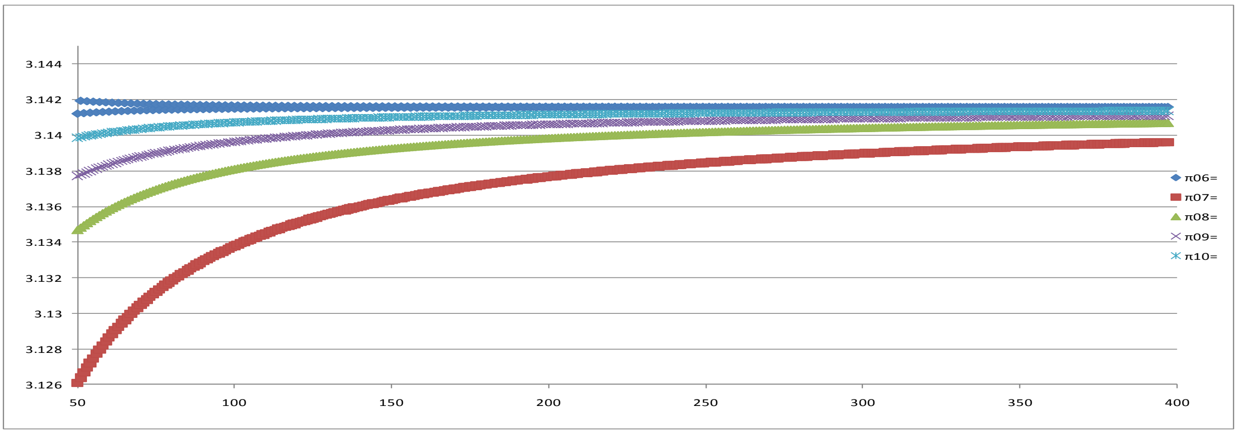
⑩ $$\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdot\frac{12\cdot12}{11\cdot13}\cdot\frac{18\cdot18}{17\cdot19}\cdot\frac{24\cdot24}{23\cdot25}\cdot\frac{30\cdot30}{29\cdot31}\cdot\cdot\cdot\frac{(6n)(6n)}{(6n-1)(6n+1)}=\frac{\pi}{3}$$

⑪ $$1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^1}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3^2}\right)-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3^4}\right)-\cdot\cdot\cdot(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

⑫ $$\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right)-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}\right)+\cdot\cdot\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

以下は、上記にあるπ０１～π１０について、グラフ化したものである。





考察 1

π 06 の数列が最も速く収束する。

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdot\cdot\cdot(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

実験 2①

つまようじ （長さ 6.5cm 幅 2mm） 平行線の間隔 7.0cm 1 回につき、20 本

鉛筆 （長さ 17.5cm 幅 8mm） 平行線の間隔 35.0cm 1 回につき、10 本

それぞれの条件で、100 本ごとに円周率を出し、10 セット行い、平均と分散を出す。

鉛筆		つまようじ
3.561	平均	2.851
0.194	分散	0.0939

考察 2①

幅が小さいものほど、π（≒3.14）の値に近似しているのは、幅が大きいものほど、それだけ平行線と重なりやすいからだと考えられる。

実験 2②

上記のつまようじの条件で、

100 本×10 セット 200 本×10 セット 500 本×10 セット

それぞれの条件で、平均と分散を出す。

	100 本	200 本	500 本
平均	2.851	2.967	2.996
分散	0.0939	0.0577	0.0792

考察 2②

試行回数を増やしていく度に、π の近似した値に近づいていった。また、比較的に散らばりは少なくなっている。しかし、確率を用いた実験のため、200 本と 500 本のときの分散において、200 本のほうの分散が小さくなっている。そのため、より多くの実験データを用意し、各本数における分散の傾向を考える必要がある。

５　まとめ

実際に過去の数学者の証明を利用して円周率πの近似値を求めることができた。特にビュホンの針とグレゴリー・ライプニッツなどの数列を用いた公式に関しては、実証実験を行い、さまざまな条件におけるπの近似の正確性や収束の速さの違いなどを調べた。このことから、ビュホンの針の実験においては、限りなく細い棒を用いて、試行回数が多ければ多いほどπの近似値が求められることがわかった。また、グレゴリー・ライプニッツの公式等々においては、プログラミングを用いることで多大な数の計算を可能にし、かつ、収束の速さの違いを比較できた。

今回調べた方法以外でも円周率πの近似値を求めることができるのか検証してみたいと思った。

６．参考文献、引用文献

高木貞治「解析概論（改訂第三版）」岩波書店