31112

行列

１．目的

数 C の授業でやった行列をより深く学び、発展的な内容まで理解するため。

２．研究・実験の手順

○３次行列の逆行列を求める。

$$A=\begin{pmatrix} a\ b\ c \\ d\ e\ f \\ g\ h\ i \end{pmatrix}\ \text{AX=E を満たす}\ X=\begin{pmatrix} p\ q\ r \\ s\ t\ u \\ v\ w\ x \end{pmatrix}\ \text{とする。}$$

$$AX=\begin{pmatrix} ap+bs+cv & aq+bt+cw & ar+bu+cx \\ dp+es+fv & dp+et+fw & dr+eu+fx \\ gp+hs+iv & gp+ht+iw & gr+hu+ix \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ap+bs+cv=1 \\ dp+es+fv=0 \\ gp+hs+iv=0 \end{cases} \begin{cases} aq+bt+cw=0 \\ dp+et+fw=1 \\ gp+ht+iw=1 \end{cases} \begin{cases} ar+bu+cx=0 \\ dr+eu+fx=0 \\ gr+hu+ix=0 \end{cases}$$

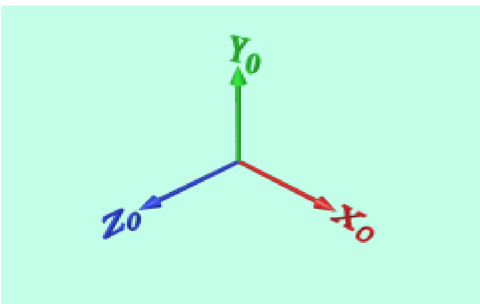
この３つの連立方程式から

$\varDelta=a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)$として

$$X=\ 1/\varDelta\begin{pmatrix} bg-ah & ch-gi & ai-cg \\ ae-bd & bf-ce & cd-af \\ dh-eg & ei-fh & fg-di \end{pmatrix}\ \text{求められる。}$$

○３次の回転の公式を求める。

2次の行列とは違い回転する次元が3つあるので回転後の座標を求めるのに式を３つ用いる。



Z を固定した場合、2 次と同じように求められるので以下の式となる。

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同様に X,Y を固定した場合以下のようになる。

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

○行列の種類を調べる。

・単位行列

対角成分には 1 が並び、他は全て 0 である行列。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

・零行列

全ての成分が 0 である行列。

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

・三角行列

対角線の左下、または右下の成分が全て 0 である行列。

特に、左下が 0 の行列を上三角行列、右下が 0 行列を下三角行列という。

上三角行列　　　　　　　　　　　　　　下三角行列

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}
\end{pmatrix}
\quad
\begin{pmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\
a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

【性質】

・上（下）三角行列同士は足してもかけても上（下）三角行列である。

・三角行列の行列式は対角成分の積で表される。よって、どの対角成分も零でなければ、三角行列は逆行列を持つ。

・対角行列

正方行列かつ、その対角成分以外が０であるような行列。

$$
\begin{pmatrix}
c_1 & & & 0 \\
& c_2 & & \\
& & \ddots & \\
0 & & & c_n
\end{pmatrix}
$$

・冪零行列

冪零（累乗）して零行列となる正方行列。

ある自然数ｍに対して、$M^m = O$ が成り立つ行列Ｍのこと。

例…

$$
\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

【性質】

・冪零行列の固有値は 0 のみである。逆に、固有値が全て 0 である行列は冪零行列である。

・対称行列

正方行列であり、(m,n)成分と (n,m) 成分が同じである行列。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

３．結果

３次の逆行列

$$\varDelta = a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)$$

$$X = 1/\varDelta \begin{pmatrix} bg-ah & ch-gi & ai-cg \\ ae-bd & bf-ce & cd-af \\ dh-eg & ei-fh & fg-di \end{pmatrix}$$

３次の回転

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

４．結果に対する考察、わかったこと

３次行列の逆行列や、回転の公式を求めてみて、２次の行列と非常に似ていると思った。

また、数Ｃで学んだ行列以外にも様々な種類の行列があるとわかった。

５．感想

３次の行列の逆行列を求めるのは複雑な計算になってとても大変だった。

大学で行列を学ぶ機会があったら、これを生かしたいと思った。