31111

ベイズの定理と確率

要旨

１年生の時に学習した「確率」をさらに深く追求していった。研究していく中で「ベイズの定理」というものがあると知ったので、ベイズ確率やベイズの定理について研究を進めていった。ベイズの定理は事前確率や事後確率などと深く関係があることが分かり、「モンティホール問題」や、身近なところではスパムメールの検出に使われていることも分かった。

１．目的

１年生の時に学習した確率について追求し、身近なところで利用されている確率について調べる。

２．研究・実験の手順

（１）　ベイズの定理やベイズ確率について知る

（２）　ベイズ確率がどこで使われているのかを調べる

（３）　ベイズ確率を使った証明をする

３．研究結果

（１）　ベイズの定理

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{p(A|B)P(B)}{P(A)}$　をベイズの定理と言う。

$P(A)$：事象 A が起こる確率

$P(B)$：事象 B が起こる確率

$P(A|B)$：事象 B が起こった後に事象 A が起こる確率

$P(B|A)$：事象 A が起こった後に事象 B が起こる確率

$P(A \cap B)$：事象 A が起こり、事象 B も起こる確率

ベイズの定理は、ある結果、データが得られた時、その結果を反映した下で事後確率を求めるのに使われている。

（2） ベイズの定理の証明

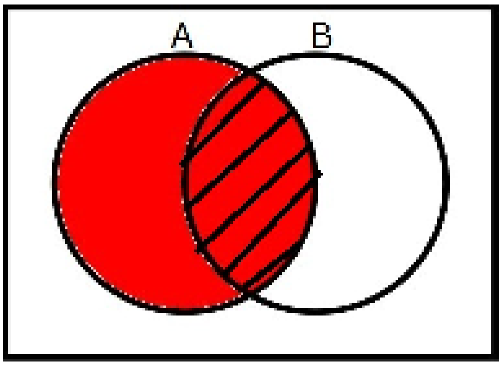
P（B｜A）$=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$において、

両辺に P(A)をかけると、

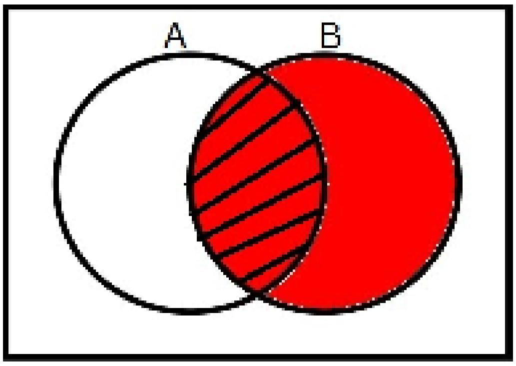
P(A)・P(B|A)＝P(B)・P(A|B)　　　　・・・①

両辺においてベン図を書いて整理すると、

左辺



右辺



（左辺）＝（右辺）より成立

また、全体集合を、U とおく。

P(A)$=\frac{A}{U}$

P(B)$=\frac{B}{U}$

P(A|B)$=\frac{A\cap B}{B}$

P(B|A)$=\frac{A\cap B}{A}$　　　であるから、

①左辺＝P(A)・P(B|A)

$=\frac{A}{U}\cdot\frac{A\cap B}{A}$

$=\frac{A\cap B}{U}$

②右辺＝P(B)・P(B|A)

$=\frac{B}{U}\cdot\frac{A\cap B}{B}$

$=\frac{A\cap B}{U}$

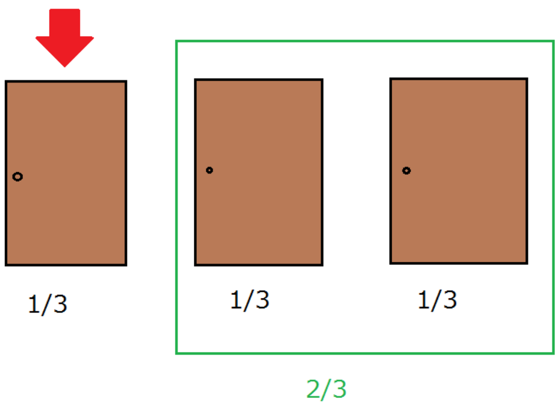
①②より、（左辺）＝（右辺）が成立する

以上より $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{p(A|B)P(B)}{P(A)}$ が成立しておる。

（３）ベイズの定理の応用（１）・・・モンティホール問題

Q、３つのドアがあり、１つには景品、２つにはハズレが入っている。
あなたはドアの向こうに何があるか分からないが、景品のドアを引き当てるとその景品がもらえます。ハズレだと何ももらえません。
あなたがドアを選んだ後、ドアの向こうに何があるのか分かる司会者が残り２つのドアのうちハズレのドアを１つ開けました。そして今あなたは自分が選んだドアと残っている開けられてないドアを交換してもいいと言われまいた。あなたあは交換すべきですか？

A、交換すべき

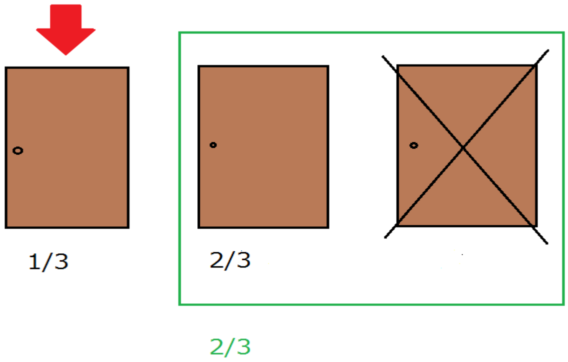


①３つのドアのうち一つを選ぶ

その確率は$\frac{1}{3}$

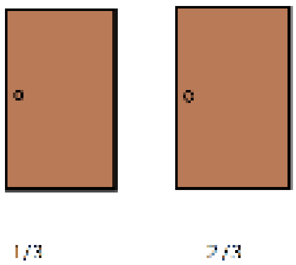
②それに対して選ばれてないドアは

$\frac{2}{3}$



③司会者が、選んでないドアのうちハズレを選んで開ける。

緑の枠内から選ぶかそうでないところから選ぶかの確率は右の図のとおりである。



④よって、最初に選んだドアが当たる確率は$\frac{1}{3}$であり、ドアを変更したときに当たる確率は$\frac{2}{3}$である。

※仮にドアの数を１００枚にしてみるとわかりやすい。
①１００枚のドアから１枚選ぶ
②司会者が残りの９９枚のうち９８枚のハズレを開ける
③残りの２枚の中から１枚を選ぶ

このとき、最初に選んだドアが当たる確率は$\frac{1}{100}$、もう１枚が当たる確率は$\frac{99}{100}$である。

（４）ベイズの定理の応用（２）・・・３囚人問題

Q、ある監獄に、A、B、C の３人の囚人がいて、それぞれ独房に入れられている。近々３人まとめて処刑されることになった。ところが恩赦が出たことによって３人のうち１人だけ助かることになった。誰が恩赦になるか分からない。A は「私は助かるのか？。」と聞いたが看守は教えてくれい。

そこで A は「私以外の２人のうち、一人は処刑される。それは誰だ。」と聞いた。すると看守は「B は処刑される。」と言った。すると A は「これで助かる確率は上がった。」とひそかに喜んだ。果たしてこれは正しいのだろうか

A、正しくない。確率の変化なし。

この３囚人の問題は、一見してモンティホール問題と変わらないようにみえる。しかし、３囚人看守がどのような回答をしても A はその回答（A と C の立場）を変えることができない点でモンティホール問題と異なっており、また確率もあがらない根拠となる。

（５） ベイズの定理の応用（３）・・・ベイズフィルター

ベイズフィルター・・・スパムメールの検出などに使われているソフトウェア。

・ベイズフィルターの仕組み

① スパムメールの集まりからスパムメールの特徴（「無料」「広告」「出会い」などの単語など）をあぶりだす。
② 事前確率を 1/2 と定める。
③ ①の特徴を利用することで事後確率を決めていく

・スパムメールの判定

スパムメールの特徴を F、スパムの特徴を A、非スパムの特徴を B とおく。

$$P(F|A)P(A)>P(F|B)P(B)$$

を満たす時、つまりスパムの特徴が非スパムの特徴よりも多いとき、そのメールはスパムと判定される。

4．結果に対する考察

ベイズの定理を利用することで、ある事象（事象 A）が起きた後に別の事象（事象 B）がおこったときの確率（事後確率）の変化を求めることができる。また、事象の変化や情報の有無、その確率が起こるときの条件によって同じような問題でも事後確率は大きく変化することがある。

5．感想

今回の研究では、今まで学習してきた確率論をさらに奥深くまで追求することができた。今まで学習してきた確率に事後確率が加わっただけで確率の値が大きく変化したことに驚いた。今回の研究を通して、さらに数学に対して興味・関心を高めることができた。

6．参考文献

ベイズの定理－wikipedia
http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%99%E3%82%A4%E3%82%BA%E3%81%AE%E5%AE%9A%E7%90%86

楽しく学べるベイズフィルターの仕組み
http://www.atmarkit.co.jp/fsecurity/special/107bayes/bayes01.html