21111

曲率

要旨

曲率、曲率半径について調べ、今までに学習した2次関数や三角関数について、曲率半径、円の中心を求めた。また、サイクロイドについて理解をした。最後にクロソイド曲線について紹介する。

1. 曲率

曲率とは曲線の曲がり具合のことを指し、1を曲率半径で割って定義される。

曲率半径が小さく曲がり具合が急なカーブの地点では、曲率が大きくなる。それに対して、曲率半径が大きく緩やかなカーブの地点では、曲率が小さくなるということになる。

例えば運動会で使われる200mトラックでは 直線部分を42.8mにすると両側に半径18mの半円を描く。この場合、トラックのカーブの部分の曲率半径は18mということになる。よって、この200mトラックでの曲率半径は18kとなる。一方、直線部分では曲率半径を無限大と考えるので、曲率は1つまり0となる。

関数f(x)上の曲率半径R、曲率kの求め方

A(x, y)から微小量だけ離れた関数上の点を  $B(x+\Delta x, y+\Delta y)$ とし、A,B における、法線の交点を C とする。また、 $\angle ACB = \Delta \theta$ とし、曲線 AB の長さを $\Delta s$ とする。

さらに、A,B における曲線の接線と、x 軸とのなす角度を、それぞれ $\alpha,\beta$ とする。  $\Delta\theta$  は、十分小さな値なので、曲線 AB を円弧とみなして、 $\Delta s = R \cdot \Delta \theta$  であるから

$$R = \frac{\Delta s}{\Delta \theta} \cdot \cdot \cdot I$$

また、 $\Delta\theta = \beta - \alpha$ であり、 $\Delta\theta$ は十分小さいので、

$$\Delta\theta \approx \tan\Delta\theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} \cdot \cdot \cdot \Pi$$

さらに、曲線 AB=線分 AB とみなして、

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \, \Delta x \quad \cdot \quad \cdot \quad \text{III}$$

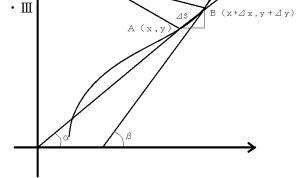
また、接線の傾きから、

 $\tan \alpha = f'(x), \tan \beta = f'(x + \Delta x)$  · · · IV

ⅡにIVを代入して、

$$\Delta\theta = \frac{\mathbf{f}'(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})}{\mathbf{1} + \mathbf{f}'(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x})} \cdot \cdot \cdot \mathbf{v}$$





ⅠにⅢとVを代入して、

$$R = lim_{\Delta \to 0} \, \frac{\Delta s}{\Delta \theta} = lim_{\Delta \to 0} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \times \Delta x \times \frac{1 + f'(x + \Delta x)f'(x)}{f'(x + \Delta x) - f'(x)} \right\}$$

$$= lim_{\Delta \to 0} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \times \left(1 + f'(x + \Delta x)f'(x)\right) \times \left(\frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}\right)^{-1} \right\}$$

$$\text{Total}(x) \to f'(x), f'(x+\Delta x) \to f'(x), \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x} \to f''(x)$$

であるから、

$$R = \frac{[1 + \{f'(x)\}^2]^{\frac{2}{2}}}{f''(x)} \quad k = \frac{1}{R}$$

2. 曲率を求めた例

(1)  $y = x^2$ の (3, 9) について曲率半径を調べ、円の中心を求める。

まず、曲率半径は  $R = \frac{\{\mathbf{1} + \mathbf{y}r^2\}_2^{\frac{3}{2}}}{\mathbf{y}''}$  とあらわせるので、 $\mathbf{y}'$ ,  $\mathbf{y}''$  を求める。

 $y = x^2$  を微分して y' = 2x …①

さらに微分して y'' = 2 …②

曲率半径  $R = \left| \frac{\{1+y'^2\}^{\frac{2}{2}}}{y''} \right|$  に①②を代入して

$$R = \left| \frac{\{1+6^2\}^{\frac{3}{2}}}{2} \right| = \frac{37\sqrt{37}}{2}$$

## よって曲率半径 R=<sup>37√37</sup>

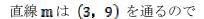
次に、(3,9) に接する直線  $\ell$  に垂直な直線  $\ell$  を求めることによって円の中心を求める。

x=3を①に代入すると

$$y' = 2 \times 3 = 6$$

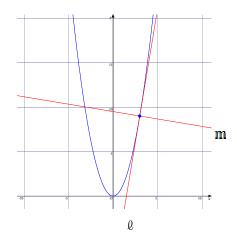
となるので、直線心の傾きは6と分かる。

また、直線mの傾きは、積が-1より $-\frac{1}{6}$ となる。



y - 9 = 
$$-\frac{1}{6}$$
(x - 3)  
y =  $-\frac{1}{6}$ x +  $\frac{19}{2}$  となる。…③

円の中心のx座標をx<sub>1</sub>とおくと、③より



(中心の y 座標 $y_1$ )= $-\frac{1}{6}x_1+\frac{19}{2}$  となり、中心  $\left(x_1, -\frac{1}{6}x_1+\frac{19}{2}\right)$  となる。

ここで、円は (3, 9) を通り、半径  $\frac{37\sqrt{37}}{2}$  、中心  $\left(x_1, -\frac{1}{6}x_1 + \frac{19}{2}\right)$  なので、式は

$$(x_1 - 3)^2 + \left\{ \left( -\frac{1}{6}x_1 + \frac{19}{2} \right) - 9 \right\}^2 = \left( \frac{87\sqrt{37}}{2} \right)^2$$

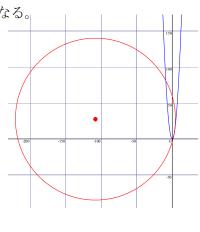
となり、まとめると

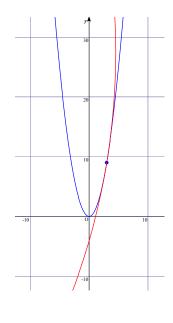
解の公式より

$$\mathbf{x_1} = \frac{\mathbf{111} - \mathbf{3}\sqrt{\mathbf{1874161}}}{\mathbf{37}}$$

③に代入して、

$$y_1 = \frac{666 + \sqrt{1874161}}{74}$$





よって、中心の座標 
$$\left(\frac{111-3\sqrt{1874161}}{37}, \frac{666+\sqrt{1874161}}{74}\right)$$

(2)  $y = \sin x$  の  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  について曲率半径を調べ、円の中心を求める。

$$\mathbf{y} = \mathbf{x^2}$$
と同様にして、曲率半径  $\mathbf{R} = \left| \frac{\{\mathbf{1} + \mathbf{y'}^2\}_2^{\frac{8}{2}}}{\mathbf{y''}} \right|$  より、 $\mathbf{y'}$ ,  $\mathbf{y''}$  を求める。

$$y = \sin x$$
 を微分して  $y' = \cos x$  …④

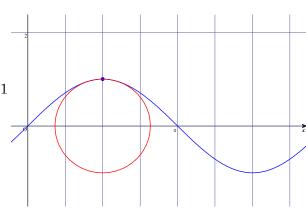
さらに微分して 
$$y'' = -\sin x$$
 …⑤

曲率半径 
$$R = \left| \frac{\{1+y'^2\}^{\frac{3}{2}}}{y''} \right|$$
 に④⑤を代入して

$$= \frac{\{1 + (\cos x)^2\}^{\frac{3}{2}}}{-\sin x}$$

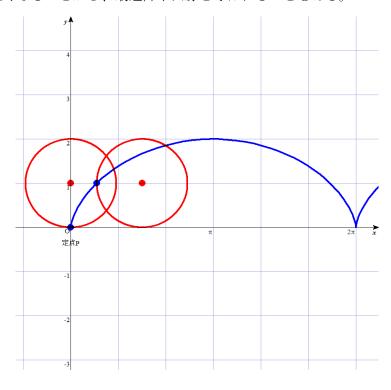
$$x = \frac{\pi}{2}$$
より =  $\begin{vmatrix} (1+0)^{\frac{3}{2}} \\ -1 \end{vmatrix}$  =1 よって曲率半径 R=1

ここで、 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  に対して半径 1 より、よって、中心の座標は  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  とわかる。



## 3. サイクロイド曲線

半径 a の円 C が定直線上を滑ることなく回転していくとき、円周上の定点 P が描く図形をサイクロイドという。この曲線のx 軸対称の曲線は、物体がこの曲線に沿って落下するとき、最も所要時間が短くなることから、最速降下曲線と呼ばれることもある。



上図のように、定直線 $\mathbf{x}$ 軸とし、 $\mathbf{P}$ の初めの位置が原点  $\mathbf{O}$  にあったとして、この円が角  $\theta$  ラジアンだけ回転した時の  $\mathbf{P}$ の位置を $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とする。

また、(x, 0)の点を T、P から直線 CT に下ろした垂線と直線 CT の交点を Q とする。

上の図において、 $OT = \overline{T} = \theta$ 

$$x=OT-PQ=a(\theta-\sin\theta)$$
  
 $y=CT-CQ=a(1-\cos\theta)$ 

従って、半径 a のサイクロイドの媒介変数表示は

$$x=a(\theta-\sin\theta)$$
,  $y=a(1-\cos\theta)$ 

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

これによって、点(x, y)における接線の傾きを求めることができる。

さらにこれを微分すると、

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d^{2}y}{d\theta^{2}} \cdot \frac{dx}{d\theta}}{\left( \frac{dx}{d\theta} \right)^{3}} - \frac{\frac{d^{2}x}{d\theta^{2}} \cdot \frac{dy}{d\theta}}{\left( \frac{dx}{d\theta} \right)^{3}}$$
$$= -\frac{1}{a(1-\cos\theta)^{2}}$$

となり、サイクロイドの接線を微分したものなので、接線の変化の割合を表したものだと言える。

## 4. クロソイド曲線

クロソイド曲線は速度が一定の車が直線から曲線に入るとき、ハンドルを一定の角速度で回した時の軌跡である。この曲線は高速道路のカーブに使われている。例えば、競技場のトラックでは、直線と半円が直接つながっているのでスピードを出したままだと急激に曲率が変わるので曲がりきれなくなる。一方、高速道路では、直線と曲線の間にクロソイド曲線が挿入してあるため、曲線の曲率まで緩やかに曲率が変化していくのでスムーズに曲がることができるようになる。

このクロソイド曲線は、原点から曲線上の任意の点までの距離 s が、曲率 k に比例する曲線と定義される。

## $\pm \hbar$ , $k = \frac{1}{R}$

であるので、曲率半径 R に反比例する式だということもいえる。

上記の定義を式に置き換えると、

または、

$$sR=C$$

このことから、標準化されたクロソイド曲線の式は、

$$x(\ell) = \int_0^{\ell} \cos \frac{\theta^2}{2} d\theta$$
,  $y(\ell) = \int_0^{\ell} \sin \frac{\theta^2}{2} d\theta$ 

と表すことができる。



http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B5%E3%82%A4%E3%82%AF%E3%83%AD%E3%82%A4%E3%83%89

http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AF%E3%83%AD%E3%82%BD%E3%82%A4%E3%83%89%E6%9B%B2%E7%B7%9A

高等学校 数学Ⅲ 改訂版(啓林館)

高等学校 数学 C 改訂版(啓林館)

