31001

三次における行列

要旨
高校では、ほとんど2×2の正方行列しか扱ってなく、三次の正方行列について考えてみたかったため、数Cで学んだ定理を三次の正方行列に応用して、自分たちで仮説を立てて求めていったら、空間における回転移動を表す行列、三次のケーリー・ハミルトンの定理、三次における逆行列を求めたり、仮説をたてることができた。

1.目的

数Cで学んだ定理を三次の正方行列に応用する。

2.概要

目的の到達点として、次の三つについて考えた。
Ⅰ.空間における、原点まわりの回転移動
Ⅱ.三次のケーリー･ハミルトンの定理
Ⅲ.三次の逆行列

3.内容

０.行列に関する基本知識
　ここでは、行列を扱う上での基本事項を簡単に説明する。

・ベクトルと行列
　写像に関する次の性質を**線型性**という。

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \text{（加法）}$$
$$f(cx)=cf(x) \quad \text{（定数倍）}$$

　有限個の元に対してこの 2 つの操作（加減・定数倍）を有限回行って作られる元（集合の要素）を、もとの元に対して**線形従属である**という。一方、この操作で作れない元をもとの元に対して**線形独立である**という。また、線形従属である元を**一次結合**という。線形従属である元は、線形独立である有限個の元の一次結合で表される。

　$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$をn次の**ベクトル**という。対して、普通の数を**スカラー**という。
　行列は各行・列ごとに分割して行・列ベクトルに分解できる。

例　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$は列ベクトル$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$に、行ベクトル$(1 \quad 2 \quad 3), (4 \quad 5 \quad 6), (7 \quad 8 \quad 9)$に分解し

て考えることができる。

行列 A の (i,j) 成分が a_{ij} で与えられているとき、$A=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ と表すことがある。

・クロネッカーのデルタ

δ_{ji} を**クロネッカーのデルタ**という。これは単位行列 E の (i,j) 成分を表す。

つまり、$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ から明らかに対角成分は 1、それ以外は 0 であるから

$\delta_{ji}=\begin{cases}1 & (j=i)\\ 0 & (j\neq i)\end{cases}$ である。

例　$\delta_{12}=0$、$\delta_{nn}=1$

・行列式

n^2 個の変数 a_{ij} $\left(i,j=1,2,3,\cdots,n\right)$ に関する多項式 $\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ を、

n 次の行列式という(定義)。

行列式は正方行列ごとに定義される固有の多項式である。

これを一般的には $|A|=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ と表す。

行列式の値が 0 でない数になる行列を特に**正則な行列**という。

例　$\begin{vmatrix}x_{11} & x_{21}\\ x_{12} & x_{22}\end{vmatrix}=x_{11}x_{22}-x_{21}x_{12}$, $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8-3\cdot5\cdot7-2\cdot4\cdot9-1\cdot6\cdot8=6$

また、行列式について以下の性質が成り立つ。

・ある行列の行成分と列成分を入れ替えた行列（**転置行列**）の行列式の値は、元の行列式の値に等しい。
よって、**行列式は行と列に関して対称であり、一方にいえる性質は他方にもいえる。**

・第 j 列の成分が複数項の和で表されるとき、この行列式の値は第 j 列を各項で置き換えて得られる複数の行列式の値に等しい。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j'}+a_{1j''} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj'}+a_{nj''} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj'} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj'} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

・第 j 列の成分を定数倍して得られる行列の行列式は、元の行列式の値の定数倍に等しい。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j'} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{nj'} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj'} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以上 2 項目から、行列式は各行（列）ベクトルについて線型であるという（**行列の多重線型性**）。

・行列式の交代性

ⅰ.行列式の行を入れ換えると、行列式の値の符号が変わる。

ⅱ.行列式の複数行が一致すれば、その値は 0 である。

つまり、

行列式のある行に他の行の各成分を定数倍したもの（一次結合）を加えても行列式の値は変わらない。

また、行列式との操作とは別に、以下の操作を**行列の基本変形**と呼ぶ。

- ある行（列）同士を入れ換える
- ある行（列）を定数倍する
- ある行（列）に他の行の定数倍を加える

以上で示したように、基本変形によって行列式の値は変わらない。

・階数

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

行列は基本変形によって、左式のように対角成分のいくつかを 1、その他の成分を 0 にすることができる。この形を**標準形**といい、1 の成分の個数を**階数**という。階数は行列の基本変形をどのような順で行っても変わらず、一つの行列に対してただ一つ決まる。

また、ある行列を $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ という列ベクトルの並びであると考えると、階数はこれらのベクトルが**互いに線形独立であるベクトルの数**であると考えることもできる。

・小行列式と余因子

正方行列のある行と列を除いた行列式を**小行列式**という。

また、その行・列を第 i 行、第 j 列とすると、その小行列式に $(-1)^{i+j}$ を乗じたものを**余因子**という。

例 $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 & 11 \\ 3 & 8 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 6 \\ 8 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ この行列式の $(3,2)$ 小行列式は、$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 11 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ である。

また、$(3,2)$ 余因子は、$\tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 9 & 11 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -(-325) = 325$

ある行列の (i,j) 成分を、その余因子 $\tilde{a}_{ij}$ で置き換えた行列の転置行列を**余因子行列**という。

例 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ の余因子行列は $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$ で与えられる。

・行列式の展開（**余因子展開**）

これは行列式の値を求める方法の一つで、列に対して $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{kj}$ 、行に対して $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik}$ で定義される。

つまり、ある行・列について展開するとき、(i,j) 成分とその余因子の項の総和のことを指す。

例 $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 & 11 \\ 3 & 8 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 6 \\ 8 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ この行列式を第 3 列について展開する。

$\tilde{a}_{31} = (-1)^{(3+1)}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 133$, $\tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 9 & 11 \\ 5 & 7 & 6 \\ 8 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 325$, $\tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 9 & 11 \\ 3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -624$,

$\tilde{a}_{34} = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 9 & 11 \\ 3 & 8 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -(-247) = 247$

以上より、$\det(A) = 4\times 133 + 7\times 325 + 0\times(-624) + 3\times 247 = 3548$

一般的に、行列式の展開は非常に煩雑である。実際に展開する際は行列の基本変形を用いて、展開する行・列にできるだけ 0 を増やしてから展開するといくらか手間が省ける。

・連立方程式への応用

一般の連立一次方程式は以下のような形で表すことができる。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

このとき、左辺の係数をそのまま並べた行列を**係数行列**といい、右辺の定数項から成る列ベクトルを係数行列の右端に並べた行列を**拡大係数行列**という。また、解が存在するとき、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ から成る列ベクトルを**解ベクトル**という。

また、係数行列を A 、右辺の列ベクトルを b とおくと上記の連立方程式は $Ax = b$ と表せる。

拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

係数行列　解ベクトル

・消去法の原理

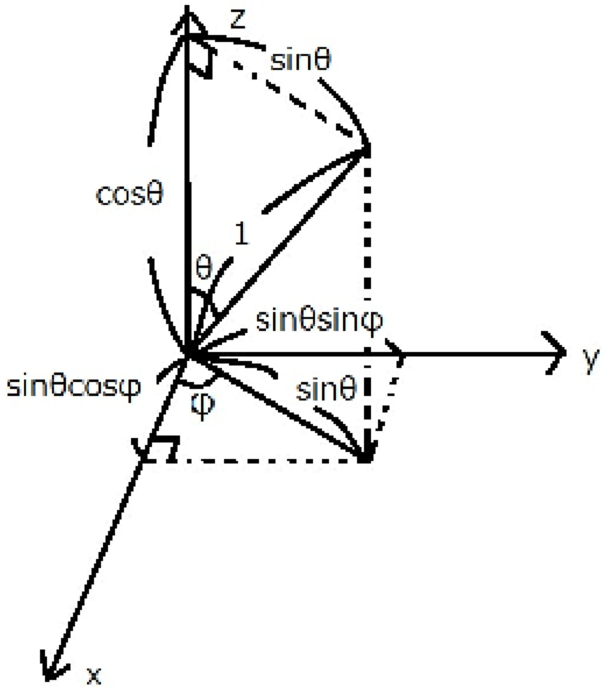
連立方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ …（＊）は必ず自明な解 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ をもつ。

しかし、それ以外の解をもつならば係数行列の行列式の値は 0 である（正則な行列ではない）。

（＊）は自明な解をもつため、必ず解をもつ。しかし、他の解も同時にもつならばこれは無数の解をもつため、係数行列は正則な行列ではない。

これは対偶「係数行列が正則ならば、解は自明な解のみである」からも明らかである。

Ⅰ.空間における、原点まわりの回転移動



まず、この図のような大きさ１のベクトルについて考える。
Z 軸とのなす角をθ、X 軸とのなす角をφとする。

この図に基づいて本題の回転移動について考えてみた。

このことから、$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

という仮説をたてた。

しかし、この行列では空間における回転移動を表すことはできなかった。

すると、三角比の定義から、

大きさ１のベクトルを$\begin{cases} x = \sin\theta\cos\phi \\ y = \sin\theta\sin\phi \\ z = \cos\theta \end{cases}$

大きさaのベクトルを$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\phi \\ y = a\sin\theta\sin\phi \\ z = a\cos\theta \end{cases}$

また、原点ではなく(d, e, f)を基点としたベクトルを考えると、

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\phi + d \\ y = a\sin\theta\sin\phi + e \\ z = a\cos\theta + f \end{cases}$$

と表すことができる。

次に X 軸とのなす角をα、Y 軸とのなす角をβ、Z 軸とのなす角をγとすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で空間における回転移動が表せられると仮定した。

これは実際に値を当てはめてみると、この行列は空間における回転移動を表すことができた。

また三次元空間における対称移動は、二次元における対称移動を応用して

X 軸対称　Y 軸対称　Z 軸対称

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

XY 平面対称　ZX 平面対称　YZ 平面対称　原点対称

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のように表すことができる。

Ⅱ.三次のケーリー･ハミルトンの定理

二次のケーリー・ハミルトンの定理は

$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ とすでに学んだ。

では、三次の場合ではどうなのか。
二次の場合と同様に特性方程式$A-kE=O$の条件から

$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$とおく。このとき$A-kE=\begin{pmatrix} a-k & b & c \\ d & e-k & f \\ g & h & i-k \end{pmatrix}$

$$\det(A-kE)=(a-k)(e-k)(i-k)+bfg+cdh-fh(a-k)-bd(i-k)-cg(e-k)$$
$$=aei+(a+e+i)k^2-k^3-(ae+ei+ia)k+bfg+cdh-afh+fhk-bdi+bdk-ceg+cgk$$
$$=-k^3+(a+e+i)k^2-(ae+ei+ia-bd-cg-fh)k+\det(A)=0$$

特性方程式の条件より、－A と k を入れ替えて
$$A^3-(a+e+i)A^2+(ae+ei+ia-bd-cg-fh)A-\det(A)\,E=0$$
これで三次におけるケーリー・ハミルトンの定理を導きだすことができた。

(例)

$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$とする。

これを上で求めたケーリー・ハミルトンの式に当てはめると、

$$(\text{左辺})=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}^3-(1+1+0)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}^2+(1+0+0-6-0-6)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$-(0+18+0-6-0-0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} 37 & 45 & 12 \\ 42 & 49 & 26 \\ 51 & 57 & 24 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 10 & 13 & 2 \\ 9 & 12 & 6 \end{pmatrix}-11\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}-12\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} 37 & 45 & 12 \\ 42 & 49 & 26 \\ 51 & 57 & 24 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 14 & 12 & 12 \\ 20 & 26 & 4 \\ 18 & 24 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 11 & 33 & 0 \\ 22 & 11 & 22 \\ 33 & 33 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}=0$$

と正しいことが証明された。

Ⅲ.三次の逆行列

二次の逆行列は $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ と表すことができる。

これは、XをAの逆行列と仮定して、$XA = E$とする。

このとき、$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　　　$X = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$で考えると

$$XA = E$$

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ra + sc & rb + sd \\ ta + uc & tb + ud \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これより、$\begin{cases} ra + sc = 1 \\ rb + sd = 0 \\ ta + uc = 0 \\ tb + ud = 1 \end{cases}$

ここからr, s, t, uをa, b, c, dで表すと、

$$\begin{cases} r = \dfrac{d}{ad - bc} \\ s = \dfrac{-b}{ad - bc} \\ t = \dfrac{-c}{ad - bc} \\ u = \dfrac{a}{ad - bc} \end{cases}$$

つまり、行列の形にして表すと、

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}$$

ここで、$ad - bc$は行列Aの行列式$\det(A)$であるから、

$$X = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

このような方法で証明ができる。

それでは、三次の逆行列はどのように表せられるのだろうか。

これも二次の行列と同様に求めることで、

三次の場合は $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} i & -d & g \\ -b & e & -h \\ c & -f & a \end{pmatrix}$ で表せられることが分かった。

これを発展させると

n 次の場合は $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$ と表すことができる。

考察

空間における原点まわりの回転移動においては、どの角を θ, φ と置くかによって行列による回転移動の表し方は変わってくる。今回はその一例を示した。だが今回求めた行列も確かではなく、実際に空間における原点まわりの回転移動を表すには四次の行列が必要であるなど、現在の方法以外での操作が必要であることが分かった。このことは現在検証中である。

三次のケーリー・ハミルトンの定理では $\mathrm{tr}(A)$ や $\det(A)$ といった成分が重要な役割を果たしていると考えられる。

三次の逆行列では余因子や小行列式など高校までの知識では解けないことがあった。そのため、これ以上内容を深めていくには大学の知識がより必要になっていくことが予想される。

感想

二次と三次の行列では、考え方はあまり変わらないが、操作が大幅に違い思いの外苦戦した。

三次のケーリー・ハミルトンの定理のように、実際に計算してみようと思うと大変な計算量になるものもあったが、結果として最初の目的は達成された。

二次の時と比べると、格段に計算の量が増えた。特にケーリー・ハミルトンの定理ではそれが顕著に表れている。実際に使われる場面があるのかどうかも疑問だが、やはり計算がかなり煩雑だった。この計算を簡略化するための工夫なども研究していきたいと思う。行列の計算は特殊なので、楽に計算する方法もあるだろうと思う。

また、原点を中心に回転移動させる行列も他の形はないのか、研究したいと思う。

逆行列も同様に、まだまだ求める方法はあると思われる。

全体的にまだ研究の余地があるものとなったと思う。

参考文献

線形代数学入門　横井英夫　著